

Postverlagsort Berlin

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT W. SÜSS†

69. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 16. SEPTEMBER 1958)



BERLIN · GOTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER - VERLAG

1958

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F.K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Es ist ferner ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet, photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote u. ä., von den Zeitschriftenheften, von einzelnen Beiträgen oder von Teilen daraus herzustellen.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole o und O , sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Frischlinstraße 27,
R. Nevanlinna, Helsinki (Finnland), Ulvilant. 7C. 26.
E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstraße 8,
F. K. Schmidt Heidelberg, Mathematisches Institut,
H. Wielandt, Tübingen, Ob dem Viehweide 21 b.

Springer-Verlag OHG — Berlin W 35, Reichpietschufer 20. — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

69. Band

Inhalt

5. (Schluß-)Heft

	Seite
Puppe, D., Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. II	395
Chen, Y. M., On a maximal theorem of Hardy and Littlewood and theorems concerning Fourier constants	418
Ramanujan, M. S., On Products of Summability Methods	423
Morita, K., On Algebras for which Every Faithful Representation is its Own Second Commutator	429
Crampe, S., Angeordnete projektive Ebenen	435
Wielandt, H., Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen	463
Ribenboim, P., Corps maximaux et complets par des valuations de KRULL.	466

Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. II

Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

Von

DIETER PUPPE

Einleitung

Unter einer *Pseudomannigfaltigkeit* verstehen wir im folgenden grundsätzlich eine orientierbare und in bestimmter Weise orientierte geschlossene Pseudomannigfaltigkeit im Sinne von SEIFERT-THRELFALL [9]. Sei P^n eine solche Pseudomannigfaltigkeit und $g: P^n \rightarrow S^n$ eine stetige Abbildung vom Grade 1 auf die n -Sphäre. V sei irgendein weiterer topologischer Raum. Wir werden folgende Frage untersuchen:

Wann folgt für alle $a: S^n \rightarrow V$ aus $a \circ g \simeq 0$ sogar $a \simeq 0$? ($\simeq$ bedeutet: homotop) — oder in der Terminologie von Teil I dieser Arbeit:

Wann ist die durch g induzierte Abbildung der Homotopiemengen $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$ monomorph (d.h. Kern $g^* = g^{*-1}(0) = 0$, vgl. [8] 1.3)?

Unter einem gewissen Aspekt wurde die Frage schon in [7] behandelt. Sei σ ein (offenes) n -Simplex einer simplizialen Zerlegung von P^n und $g: P^n \rightarrow P^n / (P^n - \sigma)^1 = S^n$ die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt. g hat offenbar den Grad 1. Ist ferner $\alpha = [a] \in \pi_n(V)$ die Homotopieklasse von $a: S^n \rightarrow V$, so ist $a \circ g$ eine Abbildung von der Art, wie sie in [7] mit f_α bezeichnet wurde. $a \circ g$ ist auf dem $(n-1)$ -dimensionalen Gerüst konstant, und die Hinderniskohomologieklasse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung ist $\bar{d}(a \circ g) = \alpha$, wenn wir die Kohomologiegruppe $H^n(P^n, \pi_n(V))$ mit $\pi_n(V)$ identifizieren (vgl. [7] § 4). Nach [7] Satz 1 ist $\alpha \in H_*^n(P^n, \pi_n(V))$ mit $a \circ g \simeq 0$ gleichwertig, d.h. es ist $H_*^n(P^n, \pi_n(V)) = \text{Kern } g^*$ (vgl. [8] 1.3). Man erhält daher aus [7] Satz 4a):

Für festes V ist $g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$ genau dann für alle Pseudomannigfaltigkeiten P^n monomorph, wenn der Hurewiczsche Homomorphismus $\pi_n(V) \cong \pi_{n-1}(\Omega V) \rightarrow H_{n-1}(\Omega V)$ monomorph ist. (ΩV ist der Raum der geschlossenen Wege in V mit festem Anfangspunkt.)

Daß für $g: P^n \rightarrow S^n$ eine spezielle Abbildung vom Grade 1 gewählt wurde, ist unwesentlich, da alle Abbildungen $P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 untereinander homotop sind (Hopf-Whitneyscher Klassifikationssatz [21] Th. 4).

¹⁾ Für $A \subset X$ bezeichnet X/A wie in Teil I [8] den Raum, der aus X durch Identifizieren von A zu einem Punkt entsteht.

Wir fragen hier umgekehrt:

Für welche Pseudomannigfaltigkeiten P^n ist $g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$, induziert durch eine Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1, für alle V monomorph?

Die Sphäre $P^n = S^n$ hat diese Eigenschaft offenbar. Zur Abkürzung nennen wir die Pseudomannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft *sphärenähnlich*. Wir werden zuerst einige Sätze über sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten allgemein beweisen und dann den Spezialfall der kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten noch genauer untersuchen. Die wichtigsten Ergebnisse sind:

1) P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn sich die Sphäre S^{n+1} mit dem Grad 1 auf die Einhängung SP^n abbilden läßt (6.3 Satz 3).

2) Produkte und „Summen“ (zur Definition s. 6.5) von sphärenähnlichen Pseudomannigfaltigkeiten sind wieder sphärenähnlich (6.4 Satz 4, 6.5 Satz 7). Insbesondere ist jedes Produkt von Sphären sphärenähnlich.

3) Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n , die topologisch und differenzierbar in den euklidischen Raum R^{n+1} eingebettet werden kann, ist sphärenähnlich (7.1).

4) Eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine kompakte differenzierbare Teilmannigfaltigkeit M' von R^{n+1} gibt, die sich mit dem Grad 1 auf M^n abbilden läßt (7.2 Satz 12).

5) Die Stiefel-Whiteyschen Klassen einer sphärenähnlichen (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeit sind trivial (7.5 Satz 13).

Außerdem wird gezeigt werden, daß alle zweidimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten sphärenähnlich sind (6.8 Satz 9), und daß sich die Sphärenähnlichkeit in der Dimension 3 durch eine bekannte Kohomologieoperation, nämlich das „Postnikow-Quadrat“ (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) — im Fall der Mannigfaltigkeiten auch durch Verschlingungszahlen (7.6 Satz 16) — charakterisieren läßt.

Die Beweise stützen sich ganz entscheidend auf die Ergebnisse und Methoden von Teil I [8]. Die Bezeichnungen und grundsätzlichen Vereinbarungen von Teil I gelten auch hier (vgl. Teil I 1.1–1.4). Insbesondere werden — von Ausnahmen abgesehen — in den Räumen Grundpunkte festgelegt und nur solche Abbildungen und Homotopien zugelassen, die die Grundpunkte ineinander überführen. Welche speziellen Punkte man als Grundpunkte nimmt, ist jedoch bei CW-Komplexen, also z.B. bei Pseudomannigfaltigkeiten von untergeordneter Bedeutung [vgl. Teil I 5.5.A) und E)].

Die Numerierung der Paragraphen von Teil I wird hier mit § 6 und § 7 weitergeführt. Bei Hinweisen auf §§ 1–5 ist immer Teil I dieser Arbeit [8] gemeint, sofern nicht ausdrücklich eine andere Arbeit zitiert wird.

§ 6. Sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten

6.1. Wie in der Einleitung bereits erklärt, nennen wir eine Pseudomannigfaltigkeit P^n *sphärenähnlich*, wenn $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$ (zur Definition s. 1.3), induziert durch eine Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1, für

jedes V monomorph ist. Es wurde auch darauf hingewiesen, daß es gleichgültig ist, welche Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 man dabei zugrunde legt, weil alle untereinander homotop sind.

Sei $e^n \subset P^n$ eine n -Zelle, und P^n entstehe aus $P^n - e^n$ dadurch, daß eine Vollkugel E^n mittels $f: S^{n-1} \rightarrow P^n - e^n$ angeheftet wird ($S^{n-1} =$ Randsphäre von E^n)²⁾. Dann ist P^n der Abbildungskegel C_f von f , und Pf ist die Injektion $P^n - e^n \rightarrow P^n$ (vgl. 1.4). $Qf: P^n \rightarrow P^n / (P^n - e^n) = S^n$ ist die natürliche Projektion (vgl. 1.9), hat also den Grad 1. Jede Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 ist daher mit Qf homotop, und aus 4.4 Satz 13 folgt:

Satz 1. *Ist P^n sphärenähnlich und hat $g: P^n \rightarrow S^n$ den Grad 1, so ist die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$ für jedes V einwertig, d.h. für alle $a, a': S^n \rightarrow V$ folgt $a \simeq a'$ aus $g \circ a \simeq g \circ a'$.*

Bemerkung. Gemäß der Vereinbarung in 1.1 ist hier unter „ $\simeq$ “ immer Homotopie relativ zum Grundpunkt zu verstehen. Unter Benutzung von [7] Hilfssatz 2 kann man aber auch zeigen: Sind $g \circ a$ und $g \circ a'$ frei homotop, so auch a und a' .

6.2. Satz 2. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist schon dann sphärenähnlich, wenn eine Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 für den speziellen Bildraum $V = S(P^n - e^n)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$ induziert. (e^n ist eine Zelle auf P^n wie in 6.1, und S ist der Einhängungsoperator, vgl. 1.8.)*

Beweis. Nach 6.1 ist g mit Qf homotop, wenn $f: S^{n-1} \rightarrow P^n - e^n$ eine anheftende Abbildung für die Zelle e^n ist. Man kann daher $g = Qf$ annehmen. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathcal{U}f$ (1.12 Satz 6) ist

$$(Qf)^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P^n, V)$$

für jedes einzelne V genau dann monomorph, wenn

$$(Sf)^*: \pi(S(P^n - e^n), V) \rightarrow \pi_n(V)$$

verschwindet. Ist $(Qf)^*$ monomorph, also $(Sf)^* = 0$ für $V = S(P^n - e^n)$, so gilt $(Sf)^*[1] = [Sf] = 0$ [vgl. 1.3, 1 bezeichnet die Identität von $S(P^n - e^n)$], d.h. $Sf \simeq 0$. Es folgt $(Sf)^* = 0$ und damit die Monomorphie von $(Qf)^*$ für alle V , d.h. P^n ist sphärenähnlich.

6.3. Satz 3. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine Abbildung $S^{n+1} \rightarrow SP^n$ ($SP^n =$ Einhängung von P^n) vom Grade 1 gibt, d.h. wenn der $(n+1)$ -dimensionale Grundzykel von SP^n sphärisch ist.*

Beweis. Für $n=1$ ist die Behauptung trivial, denn die einzige 1-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist die 1-Sphäre S^1 . Für $n>1$ ist 3.4 Satz 12 anwendbar. Demnach ist P^n genau dann sphärenähnlich, wenn die Einhängung $Sg: SP^n \rightarrow S^{n+1}$ einer Abbildung $g: P^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 ein Rechts-Homotopieinverses r besitzt. Für jede Abbildung $r: S^{n+1} \rightarrow SP^n$ ist $\text{Grad}(Sg \circ r) = (\text{Grad } Sg) \cdot (\text{Grad } r) = \text{Grad } r$. Ist also $Sg \circ r \simeq 1$, so folgt $\text{Grad } r = 1$; und wird $\text{Grad } r = 1$ vorausgesetzt, so folgt $\text{Grad}(Sg \circ r) = 1$ und damit $Sg \circ r \simeq 1$,

²⁾ Insbesondere muß der Grundpunkt von P^n in $f(S^{n-1}) \subset P^n - e^n$ liegen. Man kann (bei vorgegebenem Grundpunkt) e^n immer so wählen, daß das der Fall ist.

weil $Sg \circ r$ eine Selbstabbildung von S^{n+1} ist. Daß r rechts-homotopieinvers zu Sg ist, ist also mit $\text{Grad } r = 1$ äquivalent.

6.4. Satz 4. *Sind die Pseudomannigfaltigkeiten P_1^n und P_2^m sphärenähnlich, so auch ihr Produkt $P_1^n \times P_2^m$.*

Beweis. Nach 5.1 Satz 14 induziert die Injektion $P_1^n \times P_2^m \rightarrow P_1^n \bar{\wedge} P_2^m$ Monomorphismen der Homotopiemengen für jeden Bildraum. Weil kein Punkt einer Pseudomannigfaltigkeit ausgeartet ist [5.5.A)], gilt $P_1^n \bar{\wedge} P_2^m \equiv P_1^n \wedge P_2^m (= (P_1^n \times P_2^m) / (P_1^n \vee P_2^m))$ nach 5.6 Satz 16. Dabei geht die obige Injektion in die natürliche Projektion $p: P_1^n \times P_2^m \rightarrow P_1^n \wedge P_2^m$ über. Diese induziert also ebenfalls Monomorphismen der Homotopiemengen.

Seien $g_1: P_1^n \rightarrow S^n$ und $g_2: P_2^m \rightarrow S^m$ Abbildungen vom Grade 1. Nach Voraussetzung sind die induzierten Abbildungen der Homotopiemengen g_1^* und g_2^* für jeden Bildraum monomorph. Nach 5.11 Satz 22 folgt das gleiche für $(g_1 \wedge g_2)^*$. Also ist auch $((g_1 \wedge g_2) \circ p)^* = p^* \circ (g_1 \wedge g_2)^*$ monomorph.

Andererseits ist $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ (vgl. 5.9) und $(g_1 \wedge g_2) \circ p: P_1^n \times P_2^m \rightarrow S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ hat den Grad 1. (Man erhält nämlich dieselbe Abbildung, wenn man $g_1 \times g_2: P_1^n \times P_2^m \rightarrow S^n \times S^m$ mit der Projektion $S^n \times S^m \rightarrow S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ zusammensetzt, und für diese beiden Abbildungen sieht man leicht, daß sie den Grad 1 haben.)

Als Folgerung aus Satz 4 ergibt sich:

Satz 5. *Jedes Produkt von Sphären ist sphärenähnlich.*

(Bemerkung: Satz 5 könnte man auch aus 6.3 Satz 3 und 5.9 Satz 20 folgern.)

Satz 5 enthält (bei weiterer Spezialisierung auf 1-Sphären) den Satz von R. H. Fox [4], daß die natürliche Abbildung der Homotopiegruppen irgendeines Raumes in die Torus-Homotopiegruppen monomorph ist.

Für „gruppenartige“ (group-like) Bildräume V wurde die Monomorphie von $g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k}, V)$, induziert durch eine Abbildung

$$g: S^{n_1} \times \dots \times S^{n_k} \rightarrow S^n$$

vom Grade 1 ($n = n_1 + \dots + n_k$) auch von G. W. WHITEHEAD [16] bewiesen.

6.5. Zu zwei Pseudomannigfaltigkeiten gleicher Dimension P_0^n, P_1^n wird eine „Summe“ besonderer Art definiert, die wir (zum Unterschied von der topologischen Summe im Sinne von BOURBAKI [2]) mit $P_0^n \oplus P_1^n$ bezeichnen:

Analog wie in 6.1 sei $e_i^n < P_i^n$ eine n -Zelle, und P_i^n entstehe aus $P_i^n - e_i^n$ durch Anheften der Vollkugel E^n mittels $f_i: S^{n-1} \rightarrow P_i^n - e_i^n$ ($i = 0, 1$, $S^{n-1} = \text{Randsphäre von } E^n$). Um nicht daran gebunden zu sein, daß $f_i(S^{n-1})$ den Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n < P_i^n$ enthält, legen wir hier ausnahmsweise keine Grundpunkte fest. $\tilde{f}_i: E^n \rightarrow P_i^n$ sei die natürliche Abbildung [Einschränkung der Identifizierung $E^n + (P_i^n - e_i^n) \rightarrow P_i^n$ auf E^n]. Wir orientieren E^n und nehmen an, daß $\tilde{f}_0$ die Orientierung erhält und $\tilde{f}_1$ sie umkehrt. Das wird durch geeignete Wahl von f_i erreicht. Wenn es zunächst nicht der Fall ist, braucht man nur vor f_i eine orientierungsumkehrende Selbstabbildung

von S^{n-1} vorzuschalten. Die „Summe“ $P_0^n \oplus P_1^n$ wird nun als derjenige Raum definiert, der aus

$$(P_0^n - e_0^n) + (P_1^n - e_1^n) + (S^{n-1} \times I)$$

durch folgende Identifizierungen hervorgeht (Fig. 1):

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 0) = f_0(x) \in P_0^n - e_0^n$$

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 1) = f_1(x) \in P_1^n - e_1^n.$$

Wird P_i^n simplizial zerlegt, und wählt man bei der obigen Konstruktion für die Zelle e_i^n ein (offenes) Simplex dieser Zerlegung, so ist $P_0^n \oplus P_1^n$, wie man sehr leicht bestätigt, eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit³⁾. Die Orientierung wird so festgelegt, daß sie auf $P_i^n - e_i^n \subset P_0^n \oplus P_1^n$ ($i=0, 1$) mit der ursprünglichen übereinstimmt. Daß das möglich ist, wurde durch die Wahl des Orientierungscharakters von $\tilde{f}_i$ erreicht.

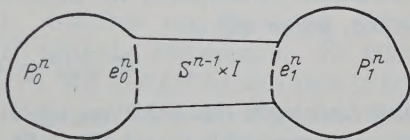


Fig. 1

Es scheint plausibel, daß $P_0^n \oplus P_1^n$ nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n und nicht von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen abhängt. Ich kenne jedoch keinen Beweis dafür. Dagegen gilt sicher:

Satz 6. *Der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ hängt nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n ab (und nicht von der Wahl der Zellen e_i^n und der anheftenden Abbildungen $f_i: S^{n-1} \rightarrow P_i^n - e_i^n$).*

Der Beweis wird in 6.10 geführt. Da es hier immer nur auf den Homotopietyp der Räume ankommt, genügt uns dieses Ergebnis. Insbesondere ist $P_0^n \oplus P_1^n$ in jedem Falle einer orientierbaren Pseudomannigfaltigkeit homotopieäquivalent, und man kann den Begriff der Sphärenähnlichkeit darauf anwenden⁴⁾.

Satz 7. *Die Summe $P_0^n \oplus P_1^n$ zweier Pseudomannigfaltigkeiten ist genau dann sphärenähnlich, wenn es beide Summanden P_i^n sind ($i=0, 1$).*

Beweis. Wir wählen (für $i=0, 1$) eine Zellenzerlegung von P_i^n , die P_i^n zu einem CW-Komplex im Sinne von J. H. C. WHITEHEAD [18] macht (z. B. eine simpliziale Zerlegung), und benutzen zur Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$ je eine n -Zelle e_i^n dieser Zerlegungen. Um die allgemeine Theorie anwenden zu können, die in Teil I dieser Arbeit entwickelt wurde, ist es bequem, nun doch Grundpunkte festzulegen: Sei x_0 der Grundpunkt von S^{n-1} . Die anheftende

³⁾ Sie unterscheidet sich von der in [7] S. 314 definierten „Summe“ von Pseudomannigfaltigkeiten nur dadurch, daß dort die Ränder der herausgenommenen Simplexe direkt miteinander identifiziert werden, während hier der „Schlauch“ $S^{n-1} \times I$ eingefügt wird. Bis auf Homotopieäquivalenz liefert beides das gleiche.

⁴⁾ Werden bei der Definition von $P_0^n \oplus P_1^n$ als Zellen e_i^n von vornherein nur Simplexe einer simplizialen Zerlegung zugelassen, so kann man im folgenden ohne Satz 6 auskommen. Man weiß dann allerdings nichts darüber, ob $P_0^n \oplus P_1^n$ von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen unabhängig ist.

Abbildung $f_i: S^{n-1} \rightarrow P_i^n - e_i^n$ wird so gewählt, daß $f_i(x_0)$ eine 0-Zelle der Zerlegung von P_i^n ist, und diese sei der gemeinsame Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n$ und P_i^n . Unter diesen Voraussetzungen (die nach Satz 6 die Allgemeinheit des Beweises nicht einschränken) läßt sich $P_i^n \oplus P_i^n$ als *CW*-Komplex auffassen: Auf $P_i^n - e_i^n$ bleibt die ursprüngliche Zerlegung, und

$$(P_0^n \oplus P_1^n) - [(P_0^n - e_0^n) \cup (P_1^n - e_1^n)] = S^{n-1} \times (I - \{0, 1\})$$

zerlegt man in die 1-Zelle $x_0 \times (I - \{0, 1\})$ und ihr Komplement, das eine n -Zelle ist.

Da $P_0^n - e_0^n$ und $P_1^n - e_1^n$ in $P_1^n \oplus P_1^n$ punktfremd sind, gibt es keinen gemeinsamen Grundpunkt für diese drei Räume. Um diesem Nachteil abzuweichen, gehen wir zu

$$P_0^n \overline{\oplus} P_1^n = (P_0^n \oplus P_1^n) / (x_0 \times I)$$

über und legen das Bild von $x_0 \times I$ in $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ als Grundpunkt fest. $x_0 \times I$ ist zusammenziehbar, und $(P_0^n \oplus P_1^n, x_0 \times I)$ ist ein Paar von *CW*-Komplexen, besitzt also die Homotopieerweiterungseigenschaft *HE* (vgl. 1.6; als Grundpunkt für $P_0^n \oplus P_1^n$ kann man irgendeinen Punkt von $x_0 \times I$ wählen). Eine Zusammenziehung von $x_0 \times I$ läßt sich daher zu einer Homotopie der Identität von $P_0^n \oplus P_1^n$ fortsetzen, und es folgt (1.2 Hilfssatz 3)

$$P_0^n \oplus P_1^n \equiv P_0^n \overline{\oplus} P_1^n.$$

Es genügt also, die Behauptung von Satz 7 für $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ an Stelle von $P_0^n \oplus P_1^n$ zu beweisen:

$(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, P_0^n - e_0^n)$ ist ein Paar von *CW*-Komplexen und hat daher die Homotopieerweiterungseigenschaft *HE* (vgl. 1.6). Für die Injektion

$$h: P_0^n - e_0^n \rightarrow P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$$

folgt also aus 1.6 Satz 2, daß

$$Ph: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \rightarrow C_h$$

mit der natürlichen Projektion

$$g: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \rightarrow (P_0^n \overline{\oplus} P_1^n) / (P_0^n - e_0^n) = P_1^n$$

(vgl. Fig. 1) homotopieäquivalent ist. g hat offenbar den Grad 1. Wir setzen ferner $g_i = Qf_i: P_i^n \rightarrow S^n$ (vgl. 6.1), wobei $f_i: S^{n-1} \rightarrow P_i^n - e_i^n$ die bei der Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$ benutzte anheftende Abbildung für e_i^n ist. g_i hat dann ebenfalls den Grad 1.

Ist nun $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sphärenähnlich, d.h. ist

$$(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, V)$$

monomorph für jeden Bildraum V , so ist offenbar auch $g_1^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P_1^n, V)$ monomorph. Aus Symmetriegründen gilt das gleiche für P_0^n , d.h. P_0^n und P_1^n sind sphärenähnlich.

Setzt man umgekehrt P_0^n und P_1^n als sphärenähnlich voraus, so ist $(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^*$ monomorph für jedes V (d.h. $P_0^n \oplus P_1^n$ sphärenähnlich), weil g_1^* und g^* es sind — g_1^* nach Voraussetzung und g^* nach

Hilfssatz 1. Ist $g_0^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P_0^n, V)$ monomorph (für ein bestimmtes V), so auch $g^*: \pi(P_1^n, V) \rightarrow \pi(P_0^n \oplus P_1^n, V)$.

Beweis. Nach Definition ist $g_0 = Qf_0$ mit $f_0: S^{n-1} \rightarrow P_0^n - e_0^n$. Aus der Monomorphie von $g_0^* = (Qf_0)^*$ folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathcal{A}_{f_0}$ (1.12 Satz 6) nacheinander, daß $(Sf_0)^*$ verschwindet und $(SPf_0)^*$ epimorph ist. Sei

$$g': P_0^n \oplus P_1^n \rightarrow (P_0^n \oplus P_1^n)/(P_1^n - e_1^n) = P_0^n$$

die natürliche Projektion (vgl. Fig. 1). Offenbar ist $Pf_0 = g' \circ h$ (denn $Pf_0: P_0^n - e_0^n \rightarrow P_0^n$ und $h: P_0^n - e_0^n \rightarrow P_0^n \oplus P_1^n$ sind die Injektionen). Es folgt $SPf_0 = Sg' \circ Sh$ und $(SPf_0)^* = (Sh)^* \circ (Sg')^*$. Mit $(SPf_0)^*$ ist also auch $(Sh)^*$ epimorph. Aus der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathcal{A}_h$ erhält man nun rückwärts: $(Qh)^* = 0$, und $(Ph)^*$ ist monomorph. Damit ist alles gezeigt, weil Ph mit g homotopieäquivalent ist.

6.6. Bemerkung. Der Beweis von Satz 7 zeigt, daß man ihn schärfer so aussprechen könnte:

Satz 7'. Induzieren die Abbildungen $g_i: P_i^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 Monomorphismen der Homotopiemengen $g_i^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi(P_i^n, V)$ für einen bestimmten Bildraum V ($i = 0, 1$), so gilt das Entsprechende für eine Abbildung $g: P_0^n \oplus P_1^n \rightarrow S^n$ vom Grade 1 — und umgekehrt.

Im Gegensatz hierzu kann man Satz 4 in 6.4 nicht in analoger Weise verschärfen, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei M^4 die komplexe projektive Ebene, die eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und $g: M^4 \rightarrow S^4$ eine Abbildung vom Grade 1. Nimmt man $V = S^4$ als Bildraum, so ist $g^*: \pi_4(S^4) \rightarrow \pi(M^4, S^4)$ monomorph, weil für jedes $a: S^4 \rightarrow S^4$

$$\text{Grad}(a \circ g) = \text{Grad } a$$

ist. Die Identität $1: S^1 \rightarrow S^1$ induziert trivialerweise einen Monomorphismus $\pi_1(S^4) \rightarrow \pi(S^1, S^4) = \pi_1(S^4) = 0$. Dagegen ist $\pi_5(S^4) \rightarrow \pi(M^4 \times S^1, S^4)$, induziert durch eine Abbildung $M^4 \times S^1 \rightarrow S^5$ vom Grade 1, nicht monomorph.

Beweis. Sei $p: M^4 \times S^1 \rightarrow M^4 \wedge S^1 = SM^4$ die natürliche Projektion (vgl. 5.3). $Sg \circ p: M^4 \times S^1 \rightarrow S^5$ hat den Grad 1 (vgl. den Beweis von Satz 4 in 6.4). Wäre $(Sg \circ p)^* = p^* \circ (Sg)^*: \pi_5(S^4) \rightarrow \pi(M^4 \times S^1, S^4)$ monomorph, so auch $(Sg)^*: \pi_5(S^4) \rightarrow \pi(SM^4, S^4)$. Das ist aber unmöglich, denn $\pi_5(S^4) \neq 0$ und $\pi(SM^4, S^4) = 0$. Letzteres folgt z.B. aus dem Steenrodschen Klassifikationsatz [10] Th. 28.1, wenn man beachtet, daß das „Steenrodsche Quadrat“ $Sq^2: H^3(SM^4, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^5(SM^4, \mathbb{Z}_2)^5$ epimorph ist ([10] § 20). Man kann es aber

⁵⁾ Zur Definition s. STEENROD [10], [12], [13], [14]. Z_m bezeichnet die zyklische Gruppe der Ordnung m . Sq^i ist die heute übliche Bezeichnung für Sq_{q-i} in [10], wenn es sich um die Abbildung der q -ten in die $(q+i)$ -te Kohomologiegruppe handelt. $Sq^0 =$ Identität, und $Sq^i = 0$ für $i > q$.

auch dem Beweis von Satz 9 in [7] entnehmen: Bei Benutzung der dortigen Bezeichnungen ist die Ordnung s von $\pi_5(S^4)$ gleich 2, und nimmt man für $f_1: S_1^4 \rightarrow S^3$ die konstante Abbildung und für $f_2: S_2^4 \rightarrow S^3$ die Einhängung der Hopfschen Faserung $S^3 \rightarrow S^2$, so stimmt die dort konstruierte Pseudomannigfaltigkeit P mit SM^4 überein (vgl. auch [10] § 20, wo M^4 genau beschrieben ist).

6.7. Satz 8. *Ist die Pseudomannigfaltigkeit P^n sphärenähnlich, so verschwinden für ihre Einhängung SP^n alle Kohomologieoperationen (zur Definition s. STEENROD [12])*

$$k: H^q(SP^n, G) \rightarrow H^{n+1}(SP^n, G')$$

mit $0 < q < n+1$ und mit beliebigen Koeffizientengruppen G, G' .

Beweis. Nach 6.3 Satz 3 gibt es eine Abbildung $r: S^{n+1} \rightarrow SP^n$ vom Grade 1. r^* sei der induzierte Homomorphismus der Kohomologiegruppen. Für jedes $c \in H^q(SP^n, G)$ gilt $r^*k(c) = kr^*(c) = k(0) = 0$, denn $r^*(c) \in H^q(S^{n+1}, G) = 0$. Daraus folgt $k(c) = 0$, da r^* in der Dimension $n+1$ ein Isomorphismus ist.

Die „Steenrodschen Quadrate“ $Sq^i: H^q(X, Z_2) \rightarrow H^{q+i}(X, Z_2)^5$ sind Kohomologieoperationen, die mit der Einhängung vertauschbar sind, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(P^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^n(P^n, Z_2) \\ \parallel & & \parallel \\ H^{n-i+1}(SP^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+1}(SP^n, Z_2) \end{array} \quad 0 \leq i < n$$

ist kommutativ (STEENROD [10] (11.5), (11.6)⁶). Aus Satz 8 ergibt sich daher:

Folgerung 1. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^{n-i}(P^n, Z_2) \rightarrow H^n(P^n, Z_2)$ für $i > 0$.*

Auch die „zyklischen reduzierten Potenzen“

$$\mathcal{P}^i: H^q(X, Z_p) \rightarrow H^{q+2i(p-1)}(X, Z_p)$$

[p = ungerade Primzahl, zur Definition s. STEENROD [14] (6.8)] sind mit der Einhängung vertauschbar ([14] (6.16)), und man erhält analog:

Folgerung 2. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die zyklischen reduzierten Potenzen*

$$\mathcal{P}^i: H^{n-2i(p-1)}(P^n, Z_p) \rightarrow H^n(P^n, Z_p) \quad \text{für } i > 0.$$

Als weiteres spezielles Beispiel interessieren die bei J. H. C. WHITEHEAD [20] § 5 definierten Kohomologieoperationen

$$p_0: H^q(X, G) \rightarrow H^{2q+1}(X, \Gamma(G)), \quad \text{„Postnikow-Quadrat“}$$

$$p_1: H^q(X, G) \rightarrow H^{2q}(X, \Gamma(G)), \quad q = \text{gerade, „Pontrjagin-Quadrat“}.$$

⁶) Daß in [10] ein etwas anderer Begriff der Einhängung benutzt wird ist unwesentlich, da die beiden verschiedenen Einhängungen für CW-Komplexe homotopieäquivalent sind (1.8 Hilfssatz 5).

(Zur Definition von $\Gamma(G)$ s. J. H. C. WHITEHEAD [19] Chap. II.) Der Isomorphismus $H^{q-1}(SP^n, G) \cong H^q(P^n, G)$ ($q > 0$) ist im wesentlichen durch den Korandhomomorphismus

$$H^q(P^n, G) \rightarrow \delta^*: H^{q+1}(\tilde{C}P^n, P^n; G)$$

gegeben (s. STEENROD [10] § 11; $\tilde{C}P^n$ bezeichnet den Kegel über P^n , vgl. auch [8] 3.7, wo der analoge Isomorphismus der Homologiegruppen ausführlich behandelt wird). Daher besagt die Formel (5.5) in [20], daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(P^n, G) & \xrightarrow{p_0} & H^n(P^n, \Gamma(G)) \\ \parallel & & \parallel \\ H^{q+1}(SP^n, G) & \xrightarrow{p_1} & H^{n+1}(SP^n, \Gamma(G)) \end{array} \quad \begin{array}{l} n = 2q + 1, \\ 0 < q = \text{ungerade} \end{array}$$

kommutativ ist. Wir erhalten also aus Satz 8:

Folgerung 3. Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n ($n = 2q + 1$, $q = \text{ungerade}$) verschwindet das Postnikow-Quadrat $p_0: H^q(P^n, G) \rightarrow H^n(P^n, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G .

6.8. Satz 9. Jede zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^2 ist sphärenähnlich.

Satz 10. Eine dreidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^3 ist genau dann sphärenähnlich, wenn das Postnikow-Quadrat $p_0: H^1(P^3, G) \rightarrow H^3(P^3, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G verschwindet. (Vgl. auch 6.9 Satz 11.)

Um die übliche Hindernistheorie anwenden zu können, wählen wir zum Beweis dieser Sätze eine simpliziale Zerlegung von P^n ($n = 2, 3$). σ sei ein (offenes) n -Simplex dieser Zerlegung und

$$g: P^n \rightarrow P^n / (P^n - \sigma) = S^n$$

die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt, die offenbar den Grad 1 hat. Für jedes $a: S^n \rightarrow V$ (V zunächst beliebig) ist dann $[a] \in \pi_n(V) = H^n(P^n, \pi_n(V))$ die Hinderniskohomologieklassse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung $P^n \rightarrow V$. Das wurde in der Einleitung unter Berufung auf [7] bereits ausgeführt.

Beweis von Satz 9. Nach 6.2 Satz 2 genügt es zu zeigen, daß die eben konstruierte Abbildung $g: P^2 \rightarrow S^2$ für den speziellen Bildraum $V = S(P^2 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_2(V) \rightarrow \pi(P^2, V)$ induziert. Weil $V = S(P^n - \sigma)$ einfach zusammenhängend ist (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9), stehen die Homotopieklassen von Abbildungen $P^2 \rightarrow V$ in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^2(P^2, \pi_2(V)) = \pi_2(V)$ (WHITNEY [21] Th. 4.5). Für jedes $a: S^n \rightarrow V$ entspricht $[a \circ g] = g^*[a]$ dabei seiner Hinderniskohomologieklassse $[a]$. Folglich wird diese umkehrbar eindeutige Beziehung gerade durch g^* geliefert. Insbesondere ist g^* monomorph.

Beweis von Satz 10. Ist P^3 sphärenähnlich, so ergibt sich das Verschwinden des Postnikow-Quadrats aus 6.7 Folgerung 3.

Zum Nachweis der Umkehrung genügt es nach 6.2 Satz 2 zu zeigen, daß die oben konstruierte Abbildung $g: P^3 \rightarrow S^3$ für $V = S(P^3 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_3(V) \rightarrow \pi(P^3, V)$ induziert. $V = S(P^3 - \sigma)$ ist einfach zusammenhängend (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9). Nach J. H. C. WHITEHEAD [20] § 7 ist $a \circ g: P^3 \rightarrow V$ (für irgendein $a: S^3 \rightarrow V$) genau dann nullhomotop, wenn die Hinderniskohomologieklassse $[a] \in \pi_3(V) = H^3(P^3, \pi_3(V))$ im Bild von

$$H^1(P^3, \pi_2(V)) \xrightarrow{p_0} H^3(P^3, \Gamma(\pi_2(V))) \xrightarrow{i_*} H^3(P^3, \pi_3(V))$$

liegt. $[i_*]$ wird dabei durch den Homomorphismus $i: \Gamma(\pi_2(V)) \cong \Gamma_3(V) \rightarrow \pi_3(V)$ aus der exakten Folge $\mathcal{L}(V)$ induziert, vgl. [19] §§ 4, 10, 13]. Verschwindet p_0 , so folgt also $[a] = 0$ aus $[a \circ g] = 0$.

6.9. In Ergänzung zu 6.7 Folgerung 3 und 6.8 Satz 10 stellen wir einige Eigenschaften des Postnikow-Quadrats

$$p_0(G): H^q(X, G) \rightarrow H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$$

zusammen:

Eine ausführliche Untersuchung von $\Gamma(G)$ findet man bei J. H. C. WHITEHEAD [19] Chap. II. Ist Z die Gruppe der ganzen Zahlen und $Z_m = Z/mZ$ zyklisch von der Ordnung m , so gilt

$$\Gamma(Z) = Z \quad ([19] \text{ § 5 (A)})$$

$$\Gamma(Z_m) = \begin{cases} Z_m & \text{für ungerades } m \\ Z_{2m} & \text{für gerades } m \end{cases} \quad ([19] \text{ § 5 (B)}).$$

Nach [20] (5.1) wird $p_0(Z)$ und $p_0(Z_m)$ durch $c \rightarrow c \cup \delta c$ ($\delta =$ Korandoperator) induziert, wobei c eine ganzzahlige q -Kokette von X mit $\delta c = 0$ bzw. $\delta c \equiv 0 \pmod{m}$ ist. Daraus folgt:

$p_0(Z)$ und $p_0(Z_m)$ für ungerades m verschwinden immer.

Für gerades m ist dagegen nicht von vornherein $p_0(Z_m) = 0$, da dann $c \cup \delta c$ nicht mod m sondern nur mod $2m$ zu reduzieren ist.

Satz 11. Das Postnikow-Quadrat $p_0(G): H^q(X, G) \rightarrow H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$ verschwindet schon dann für jede Koeffizientengruppe G , wenn es für die speziellen Gruppen Z_k , $k=1, 2, \dots$, verschwindet.

Beweis. Ein Homomorphismus $\xi: G' \rightarrow G$ induziert $\Gamma\xi: \Gamma(G') \rightarrow \Gamma(G)$ (s. [19] § 6). Aus den Definitionen von $\Gamma\xi$ und p_0 (s. [20] (5.1)) folgt unmittelbar, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, G') & \xrightarrow{p_0(G')} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G')) \\ \xi_* \downarrow & & \downarrow (\Gamma\xi)_* \\ H^q(X, G) & \xrightarrow{p_0(G)} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G)) \end{array}$$

kommutativ ist.

Sei nun zunächst G endlich erzeugt. Dann ist $G = \sum_v G^{(v)}$ mit $G^{(v)} = Z$ oder Z_{p^k} ($p = \text{Primzahl}$). Ist $\xi^{(v)}: G^{(v)} \rightarrow G$ die Injektion und $\eta^{(v)}: G \rightarrow G^{(v)}$ die Projektion, so gilt

$$p_0(G) \circ \xi_*^{(v)} = (\Gamma \xi^{(v)})_* \circ p_0(G^{(v)}) = 0,$$

denn $p_0(G^{(v)})$ verschwindet (für $G^{(v)} = Z$ oder Z_{p^k} mit ungeradem p immer, und für $G^{(v)} = Z_{2^k}$ nach Voraussetzung). Wegen $\sum_v \xi^{(v)} \circ \eta^{(v)} = 1$ folgt

$$p_0(G) = p_0(G) \circ \sum_v \xi_*^{(v)} \circ \eta_*^{(v)} = \sum_v p_0(G) \circ \xi_*^{(v)} \circ \eta_*^{(v)} = 0.$$

Im allgemeinen Fall (G eventuell nicht endlich erzeugt) gibt es zu jedem $c \in H^q(X, G)$ eine endlich erzeugte Untergruppe $G' < G$, so daß $c \in \xi_* H^q(X, G')$, wenn $\xi: G' \rightarrow G$ die Injektion bezeichnet. Nun ist, wie oben gezeigt wurde, $p_0(G) \circ \xi_* = (\Gamma \xi)_* \circ p_0(G') = 0$, also $p_0(G)(c) = 0$.

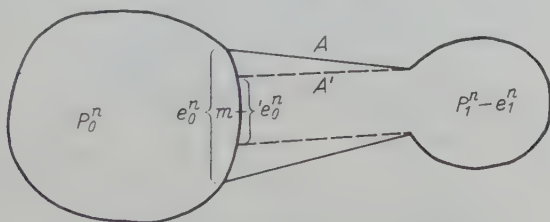


Fig. 2

6.10. Beweis von Satz 6. Es soll gezeigt werden, daß der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ erhalten bleibt, wenn man die bei der Konstruktion benutzten Zellen $e_i^n \subset P_i^n$ und anheftenden Abbildungen $f_i: S^{n-1} \rightarrow P_i^n - e_i^n$ ($i = 0, 1$, vgl. 6.5) durch andere Zellen und anheftende Abbildungen ersetzt. Man beachte, daß hier ausnahmsweise keine Grundpunkte festgelegt wurden; es wird sich also immer um freie Homotopien und Homotopieäquivalenzen handeln.

I. Wir ändern zunächst nur e_0^n in $'e_0^n$, f_0 in $f'_0: S^{n-1} \rightarrow P_0^n - 'e_0^n$ ab, und zwar so, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{'e_0^n}$ von $'e_0^n$ in e_0^n liegt. Sei m ein Punkt in $'e_0^n$ und A bzw. A' entstehe aus

$$(P_0^n - m) + (P_1^n - e_0^n) + (S^{n-1} \times I)$$

durch die Identifizierungen (Fig. 2)

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 0) = f_0(x) \quad \text{bzw.} \quad f'_0(x) \in P_0^n - m$$

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 1) = f_1(x) \in P_1^n - e_1^n.$$

Weil $P_0^n - e_0^n$ und $P_0^n - 'e_0^n$ Deformationsretrakte von $P_0^n - m$ sind, ist $P_0^n \oplus P_1^n$ Deformationsretrakt von A , wenn man $P_0^n \oplus P_1^n$ mit Hilfe von e_0^n, e_1^n, f_0, f_1 konstruiert, und Deformationsretrakt von A' , wenn man $'e_0^n, e_1^n, f'_0, f_1$ zur Konstruktion benutzt (vgl. 6.5). Um zu sehen, daß sich der Homotopietyp

von $P_0^n \oplus P_1^n$ bei Ersetzung von e_0^n, f_0 durch $'e_0^n, f_0'$ nicht ändert, genügt es also zu zeigen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist:

P_0^n sollte aus $P_0^n - e_0^n$ durch Anheften einer Vollkugel E^n mittels $f_0: S^{n-1} \rightarrow P_0^n - e_0^n$ entstehen (S^{n-1} = Randsphäre von E^n). Man kann daher $'e_0^n$ als Teilmenge von $E^n - S^{n-1}$ und f_0' als Abbildung in $E^n - S^{n-1} \subset E^n$ auffassen. Weil $f_0'(S^{n-1})$ in E^n die Verschlingungszahl 1 mit m hat (vgl. die Orientierungsvorschriften in 6.5), ist $f_0': S^{n-1} \rightarrow E^n - m$ zu der Injektion $S^{n-1} \rightarrow E^n - m$ homotop. Durch Zusammensetzen mit der Identifizierung $(E^n - m) + (P_0^n - e_0^n) \rightarrow P_0^n - m$ gehen diese Abbildungen in

$$f_0': S^{n-1} \rightarrow P_0^n - 'e_0^n \subset P_0^n - m$$

bzw.

$$f_0: S^{n-1} \rightarrow P_0^n - e_0^n \subset P_0^n - m$$

über, die infolgedessen als Abbildungen in $P_0^n - m$ homotop sind. Sei $\Phi_t: S^{n-1} \rightarrow P_0^n - m$ ($t \in I$) eine Homotopie zwischen f_0 und f_0' , d.h. $\Phi_0 = f_0$, $\Phi_1 = f_0'$. Wir definieren $\chi: A \rightarrow A'$ und $\chi': A' \rightarrow A$ durch

$$\chi|[(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi(x, s) = \begin{cases} \Phi_{2s}(x), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, s) \in S^{n-1} \times I$$

$$\chi'|[(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi'(x, s) = \begin{cases} \Phi_{1-2s}(x), & s \leq \frac{1}{2} \\ (x, 2s - 1), & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (x, s) \in S^{n-1} \times I.$$

Wie man leicht sieht, ist dann

$$\chi' \circ \chi \simeq 1, \quad \chi \circ \chi' \simeq 1;$$

denn $\chi' \circ \chi$ ist auf $(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)$ die Identität, und die Strecke $x \times I \subset S^{n-1} \times I$ geht in einen Weg über, der sich aus dem Deformationsweg von x bei der Homotopie Φ_t , dem Inversen davon und der Strecke $x \times I$ zusammensetzt. Analoges gilt für $\chi \circ \chi'$. Es ist also bewiesen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist.

II. Nun werden wir uns von der Voraussetzung $\overline{'e_0^n} \subset e_0^n$ befreien: Seien $e_{01}^n, e_{02}^n \in P_0^n$ irgend zwei n -Zellen. Man wähle eine simpliziale Zerlegung von P_0^n und zwei n -Zellen $'e_{01}^n, 'e_{02}^n \subset P_0^n$, so daß $\overline{'e_{0j}^n}$ ($j = 1, 2$) ganz im Inneren eines n -Simplexes von P_0^n und zugleich in e_{0j}^n enthalten ist (Fig. 3). Man verbinde einen Punkt von $'e_{01}^n$ mit einem Punkt von $'e_{02}^n$ durch einen doppel-punktfreien Weg, der das $(n-2)$ -dimensionale Gerüst von P_0^n nicht trifft. Nach Definition der Pseudomannigfaltigkeit ist das möglich (Verbindbarkeit, vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 24). Eine geeignete „schlauchartige“ Umgebung e_{03}^n dieses Weges ist eine n -Zelle und enthält $\overline{'e_{01}^n}$ und $\overline{'e_{02}^n}$.

Haben die Ausgangszellen e_{0j}^n die Eigenschaft, daß P_0^n aus $P_0^n - e_{0j}^n$ durch Anheften einer Vollkugel entsteht⁷⁾, so kann man die drei weiteren hier betrachteten Zellen offenbar so wählen, daß sie auch die entsprechende Eigenschaft haben. Nach dem Beweisschritt I ändert sich der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ nicht, wenn man bei der Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$

e_{01}^n durch $'e_{01}^n$, $'e_{01}^n$ durch e_{03}^n , e_{03}^n durch $'e_{02}^n$, oder $'e_{02}^n$ durch e_{02}^n ersetzt (und dabei beliebige anheftende Abbildungen benutzt), also auch dann nicht, wenn man e_{01}^n durch e_{02}^n ersetzt.

III. Entsprechend kann man die aus P_1^n herausgenommene Zelle e_1^n beliebig abändern, und Satz 6 ist bewiesen.

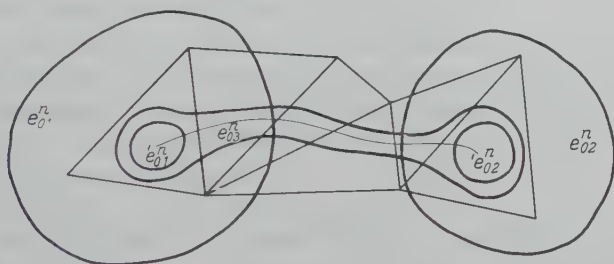


Fig. 3

§ 7. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

7.1. Unter einer *Mannigfaltigkeit* M^n verstehen wir hier eine kompakte, orientierbare und orientierte, homogene Mannigfaltigkeit, die sich mit einer Differenzierbarkeitsstruktur⁸⁾ versehen läßt. Jede solche Mannigfaltigkeit ist eine Pseudomannigfaltigkeit im Sinne der Einleitung und des vorigen Paragraphen. (Zur Frage der simplizialen Zerlegbarkeit vgl. J. H. C. WHITEHEAD [17] Th. 7.)

Ist M^n einer differenzierbaren Teilmannigfaltigkeit des euklidischen Raumes R^{n+1} homöomorph (nicht notwendig differenzierbar homöomorph), so nennen wir M^n *einbettbar*.

Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1} . Wir erweitern R^{n+1} durch den Punkt ∞ zur Sphäre S^{n+1} . Trägt man auf jeder Normalen durch einen Punkt von M^n nach beiden Seiten eine (abgeschlossene) Strecke der Länge $\varepsilon > 0$ ab, so erhält man, falls ε genügend klein ist, eine (abgeschlossene) Umgebung U von M^n , die dem Produkt $M^n \times I$ homöomorph ist (vgl. THOM [15] II.3, „voisinage tubulaire“⁹⁾). Die natürliche Projektion $M^n \times I \rightarrow SM^n$ auf die Einhängung von M^n (vgl. 1.8) läßt sich zu einer Abbildung

⁷⁾ Mir ist nicht bekannt, ob das eine echte Einschränkung ist.

⁸⁾ „Differenzierbar“ bedeutet hier immer: beliebig oft differenzierbar.

⁹⁾ Im allgemeinen ist die „voisinage tubulaire“ ein (nichttrivialer) Faserraum über M^n . In unserem Fall ist der Faserraum trivial, weil M^n als orientierbare Hyperfläche in R^{n+1} zweiseitig ist.

$r: S^{n+1} \rightarrow SM^n$ erweitern (das Komplement von $U = M^n \times I$ geht in den Grundpunkt über), die offenbar den Grad 1 hat. Daraus und aus 6.3 Satz 3 folgt:

Jede einbettbare Mannigfaltigkeit ist sphärenähnlich.

Bemerkungen. 1. Hier wurde die Tatsache, daß M^n eine Mannigfaltigkeit ist (und nicht bloß eine Pseudomannigfaltigkeit) nur benutzt, um die Existenz von U , d.h. die Möglichkeit, $M^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einzulagern, zu zeigen. Für Pseudomannigfaltigkeiten P^n gilt also: *Läßt sich $P^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einbetten, so ist P^n sphärenähnlich.*

2. Es ist leicht zu zeigen, daß jedes Produkt von Sphären einbettbar ist. Man könnte also 6.4 Satz 5 auch hier gewinnen.

7.2. Nicht jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist einbettbar, wie die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p zeigen (vgl. 7.7). Es gilt jedoch:

Satz 12. *Eine Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine einbettbare Mannigfaltigkeit $'M^n$ gibt, die sich durch eine Abbildung $'M^n \rightarrow M^n$ vom Grade 1 auf M^n abbilden läßt.*

Beweis. I. Haben $h: 'M^n \rightarrow M^n$ und $g: M^n \rightarrow S^n$ den Grad 1, so auch ihre Zusammensetzung $'g = g \circ h$. Ist $'M^n$ einbettbar, so ist es nach 7.1 sphärenähnlich; nach Definition (s. Einleitung oder 1.1) ist also die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $'g^* = h^* \circ g^*: \pi_n(V) \rightarrow \pi_n('M^n, V)$ für jeden Bildraum V monomorph. Folglich ist auch g^* monomorph. Das zeigt, daß die Bedingung für Sphärenähnlichkeit hinreichend ist.

II. Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß M^n sphärenähnlich ist. Dann gibt es nach 6.3 Satz 3 eine Abbildung $S^{n+1} \rightarrow SM^n$ vom Grade 1. Statt SM^n benutzen wir hier besser die andere Art der Einhängung $\tilde{S}M^n$ (vgl. 1.8) und verzichten auf die Festlegung von Grundpunkten. $\tilde{S}M^n$ entsteht aus $M^n \times I$ durch Identifizieren von $M^n \times 0$ und $M^n \times 1$ zu je einem Punkt s_- bzw. s_+ . Nach 1.8 Hilfssatz 5 ist $\tilde{S}M^n$ mit SM^n homotopieäquivalent, also gibt es auch eine Abbildung $f': S^{n+1} \rightarrow \tilde{S}M^n$ vom Grade 1. $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\}$ ist das Produkt von M^n mit einer offenen Strecke, die wir für den Augenblick durch die euklidische Gerade R^1 repräsentieren. Wir wählen auf M^n eine Differenzierbarkeitsstruktur⁸⁾ und eine Metrik (im Sinne der Topologie, nicht Riemannsche Metrik). Die Metrik sei etwa dadurch bestimmt, daß M^n in einen euklidischen Raum R^m genügend hoher Dimension topologisch (nicht unbedingt differenzierbar) eingebettet wird. Damit ist eine Differenzierbarkeitsstruktur auf $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ gegeben und eine Metrik ϱ (die Produktmetrik mit der euklidischen Metrik von R^1). Auch $S^{n+1} - f'^{-1}\{s_-, s_+\} = f'^{-1}(M^n \times R^1)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (allerdings nicht kompakt und eventuell nicht zusammenhängend). Nach STEENROD [II] 6.7 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare ε -Approximation von $f' | f'^{-1}(M^n \times R^1)$, d.h. eine differenzierbare⁸⁾ Abbildung

$$f'': f'^{-1}(M^n \times R^1) \rightarrow M^n \times R^1 \subset \tilde{S}M^n$$

mit $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in f'^{-1}(M^n \times R^1)$. Die Festsetzung $f''(x) = f'(x)$ für alle $x \in f'^{-1}\{s_-, s_+\}$ ergänzt f'' zu einer stetigen Abbildung $S^{n+1} \rightarrow SM^n$, denn wegen $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ strebt $f''(x)$ zugleich mit $f'(x)$ gegen s_- bzw. s_+ . Wird ε genügend klein gewählt, so ist $f'' \simeq f'^{10}$, also hat mit f' auch f'' den Grad 1.

Wir identifizieren M^n mit $M^n \times 0 \subset M^n \times R^1 \subset \tilde{S}M^n$. Nach THOM [15] Th. I.5 gibt es einen differenzierbaren Homöomorphismus h von $M^n \times R^1$ auf sich mit folgenden Eigenschaften:

- a) h ist außerhalb von $\{(y, t) \mid y \in M^n, t \in R^1, |t| \leq 1\}$ die Identität.
 - b) h bildet $y \times R^1$ für jedes $y \in M^n$ in sich ab.
 - c) Setzt man $f = h \circ f''$, so besteht $f^{-1}(M^n)$ aus (einer oder mehreren) differenzierbaren Teilmannigfaltigkeiten M_i^n , $i = 1, 2, \dots, q'$, von S^{n+1} .
- Wegen a) läßt sich h durch die Festsetzungen $h(s_-) = s_-$, $h(s_+) = s_+$ auf ganz $\tilde{S}M^n$ und damit f auf S^{n+1} erweitern. Wegen b) ist $h \simeq 1$ [man kann (y, t) mit $h(y, t)$ in $y \times R^1$ durch eine Strecke verbinden]. Folglich ist $f \simeq f''$; f hat daher ebenso wie f'' den Grad 1.

Zur Abkürzung wird definiert

$$C_- M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n, t \leq 0\} \cup \{s_-\} \subset \tilde{S}M^n$$

$$C_+ M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n, t \geq 0\} \cup \{s_+\} \subset \tilde{S}M^n$$

$$\bar{f} = f|f^{-1}(M^n).$$

Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(S^{n+1}) & \rightarrow & H_{n+1}(S^{n+1}, f^{-1}(C_- M^n)) & \xleftarrow{\simeq} & H_{n+1}(f^{-1}(C_+ M^n), f^{-1}(M^n)) & \rightarrow & H_n(f^{-1}(M^n)) \\ f_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \bar{f}_* \\ H_{n+1}(\tilde{S}M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_{n+1}(\tilde{S}M^n, C_- M^n) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(C_+ M^n, M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M^n), \end{array}$$

in dem die vertikalen Homomorphismen durch die Abbildung f und ihre Einschränkungen, die horizontalen durch Injektionen bzw. durch den Randhomomorphismus induziert sind, ist kommutativ. Einige Homomorphismen sind als Isomorphismen gekennzeichnet. Daß das richtig ist, folgt aus dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property“) bzw. aus der Zusammenziehbarkeit von $C_- M^n$ und $C_+ M^n$. Weil f den Grad 1 hat, ist f_* epimorph. Aus dem Diagramm ergibt sich, daß dann alle vertikalen Abbildungen Epimorphismen sein müssen, insbesondere auch $\bar{f}_*$. Sind z'_i und z Erzeugende von $H_n(M_i^n) \subset H_n(f^{-1}(M^n))$ [vgl. oben c)] bzw. $H_n(M^n)$, so gibt

¹⁰ Beweis. Nach Voraussetzung liegt M^n in R^m und trägt die induzierte Metrik. In naheliegender Weise läßt sich $\tilde{S}M^n$ so in R^{m+1} einbetten, daß die induzierte Metrik $\bar{\varrho}$ auf $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ durchweg kleiner ist als ϱ . Es ist also erst recht $\bar{\varrho}(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in S^{n+1}$. Nun folgt die Behauptung aus Satz II und III bei ALEXANDROFF-HOPF [I] S. 343f.

es demnach eine Linearkombination $\sum_i \gamma_i z'_i$ mit

$$(1) \quad \bar{f}_* \left(\sum_i \gamma_i z'_i \right) = z.$$

z ist durch die Orientierung von M^n festgelegt; z'_i und damit die Orientierung von M_i^n wählen wir so, daß $\gamma_i \geq 0$ ist für alle i .

Für jedes i nehmen wir nun γ_i Exemplare von M_i^n . Die Gesamtheit dieser Mannigfaltigkeiten wird in der Form M_j^n , $j = 1, 2, \dots, q$, neu durchnumeriert; d. h. jedes M_j^n ist ein M_i^n , und jedes M_i^n kommt unter den M_j^n genau γ_i -mal vor. Wird

$$(2) \quad f^{(j)} = \bar{f}|M_j^n = f|M_j^n$$

gesetzt, und bezeichnet man die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^n(M_j^n)$ mit z_j ($= z'_i$ für ein gewisses i), so kann man (1) in der Form

$$(3) \quad \sum_{j=1}^q f_*^{(j)}(z_j) = z$$

schreiben.

Eine einbettbare Mannigfaltigkeit M^n , die sich mit dem Grade 1 auf M^n abbilden läßt, erhält man nun in der Form $M^n = M_1^n \oplus M_2^n \oplus M_3^n \oplus \dots \oplus M_q^n$ (Summe im Sinne von 6.5). Wir werden nämlich zeigen:

A) Man kann die Konstruktion von $M_1^n \oplus M_2^n \oplus \dots \oplus M_q^n$ (vgl. 6.5) so ausführen, daß eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit M^n des euklidischen Raumes R^{n+1} entsteht.

B) Es gibt eine Abbildung $M^n \rightarrow M^n$ vom Grade 1.

Beweis von A). Nach Konstruktion sind die Mannigfaltigkeiten M_j^n ($= M_i^n$ für geeignetes i) einbettbar. Wir legen sie disjunkt in den R^{n+1} . Um zunächst $M_1^n \oplus M_2^n$ zu bilden, wählen wir auf M_1^n und M_2^n je eine (kleine) abgeschlossene Vollkugel. Ihr Inneres sei die Zelle e_i^n ($i = 1, 2$). Daß sich die Ränder von $M_1^n - e_1^n$ und $M_2^n - e_2^n$ überhaupt in R^{n+1} durch einen „Schlauch“ $S^{n-1} \times I$ verbinden lassen, der topologisch eingelagert ist und abgesehen von seinen Randsphären, keine Punkte mit $M_1^n \cup M_2^n$ gemeinsam hat, ist klar. Durch „Abrunden“ an den Ansatzstellen sorgt man dafür, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit entsteht. Um wirklich $M_1^n \oplus M_2^n$ zu erhalten, muß man jedoch noch auf die Orientierungen achten: Wenn der Verbindungsschlauch $S^{n-1} \times I$ an M_2^n „von außen“ angesetzt wird, so wird durch die Orientierungen festgelegt, ob er an M_1^n „von außen“ oder „von innen“ angesetzt werden muß. Je nachdem ob das eine oder andere der Fall ist, legen wir M_2^n in das Außen- oder Innengebiet von M_1^n (eventuell unter Abänderung der zuerst gewählten Einbettung). Dann sind auch die Orientierungsvorschriften erfüllt. Analog wird $(M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n$ aus $M_1^n \oplus M_2^n$ und M_3^n gebildet, und in dieser Weise fortfahrend, ganz $M^n = M_1^n \oplus M_2^n \oplus \dots \oplus M_q^n$ als differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1} konstruiert.

Beweis von B). Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir für die Zellen, die bei der Konstruktion von

$$M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \quad ((M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n) \oplus M_4^n, \dots$$

aus

$$M_1^n, \quad M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \dots$$

herausgenommen werden, disjunkte Zellen auf M_1^n wählen. Identifiziert man dann in den „Verbindungsschläuchen“ $S^{n-1} \times I$, die in M^n auftreten, jeweils die „mittlere Sphäre“ $S^{n-1} \times \frac{1}{2}$ zu einem Punkt, so entsteht ein Raum X , den man aus der topologischen Summe $M_1^n + M_2^n + \dots + M_q^n$ dadurch erhalten kann, daß je ein Punkt $m_j \in M_j^n$ ($j = 2, 3, \dots, q$) mit einem gewissen Punkt $m_{1j} \in M_1^n$ identifiziert wird. $\psi: M^n \rightarrow X$ sei die natürliche Projektion. Setzt man $f^{(1)} = f^{(1)}$ [vgl. (2)] und deformiert man $f^{(j)}$ in $f^{(j)}: M_j^n \rightarrow M^n$ so, daß $f^{(j)}(m_j) = f^{(1)}(m_{1j})$ ist ($j = 2, 3, \dots, q$), so induzieren die $f^{(j)}$ zusammen ($j = 1, 2, \dots, q$) eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow M^n$, definiert durch $\varphi|_{M_j^n} = f^{(j)} \cdot \varphi \circ \psi: M^n \rightarrow M^n$ hat den Grad 1, denn sind z, z' und z_j die durch die Orientierung bestimmten Erzeugenden von $H_n(M^n)$, $H_n(M^n)$ bzw. $H_n(M_j^n) \subset H_n(X)$, so ist

$$\varphi_* \psi_*(z') = \varphi_* \left(\sum_j z_j \right) = \sum_j f_*^{(j)}(z_j) = \sum_j f_*^{(j)}(z_j),$$

also nach (3)

$$\varphi_* \psi_*(z') = z.$$

7.3. Bemerkung. Bekanntlich bedeutet die Existenz einer Abbildung $g: M^n \rightarrow M^n$ vom Grade 1 eine starke Einschränkung für das Paar von Mannigfaltigkeiten (M^n, M^n) . Wir heben hier zwei Punkte hervor (vgl. auch 7.5 Satz 15):

A) g induziert Epimorphismen der Homologie- und Monomorphismen der Kohomologiegruppen (mit beliebigen Koeffizientengruppen).

Beweis. Sind $g_*: H_i(M^n, G) \rightarrow H_i(M^n, G)$, $g^*: H^i(M^n, G) \rightarrow H^i(M^n, G)$ die induzierten Homomorphismen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, so gilt für alle $c \in H^i(M^n, G)$, $z' \in H_j(M^n, Z)$ (G ist irgendeine abelsche Gruppe, Z die Gruppe der ganzen Zahlen):

$$(4) \quad g_*(g^*(c) \cap z') = c \cap g_*(z').$$

(Vgl. Gysin [5] (5.11), das $\cap$ -Produkt ist eine bilineare Abbildung $H^i(M^n, G) \times H_j(M^n, Z) \rightarrow H_{j-i}(M^n, G)$, die in gewisser Weise — s. [5] — durch die natürliche bilineare Abbildung $G \times Z \rightarrow G$ induziert wird.) Ist z' speziell die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n(M^n, Z)$, so ist $z = g_*(z')$ die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n(M^n, Z)$. Die Zuordnung $c \rightarrow c \cap z$ definiert einen Isomorphismus $H^i(M^n, G) \rightarrow H_{n-i}(M^n, G)$ (Poincaréscher Dualitätssatz, vgl. [5] § 6). Daher läßt sich jede Homologieklass von M^n in der Form $c \cap z$ schreiben, ist also nach (4) g_* -Bild von $g^*(c) \cap z'$, d.h. g_* ist epimorph. Aus $g^*(c) = 0$ folgt $c \cap z = 0$ nach (4) und daraus $c = 0$ nach dem Poincaréschen Dualitätssatz, d.h. g^* ist monomorph.

B) Ist M^n vom Homotopietyp der Sphäre S^n , so auch $\tilde{M}^n$.

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß es eine Abbildung $g': S^n \rightarrow M^n$ vom Grade 1 gibt. Ist $\tilde{M}^n$ eine Überlagerung von M^n , so läßt sich $g': S^n \rightarrow M^n$ in eine Abbildung $\tilde{g}: S^n \rightarrow \tilde{M}^n$ und die Projektion $p: \tilde{M}^n \rightarrow M^n$ zerlegen (vgl. z.B. STEENROD [11] 17.6). $g' = p \circ \tilde{g}$ kann nur dann den Grad 1 haben, wenn $\tilde{M}^n$ kompakt ist [denn sonst ist $H_n(\tilde{M}^n) = 0$] und p den Grad ± 1 hat. Dann ist aber $\tilde{M}^n$ keine echte Überlagerung von M^n , sondern p ist eine Homöomorphie. Daraus folgt $\pi_1(M^n) = 0$. Nach A) ist $g'_*: H_i(S^n) \rightarrow H_i(M^n)$ epimorph und wegen der speziellen Struktur von $H_i(S^n)$ sogar isomorph. Folglich ist g' eine Homotopieäquivalenz (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [18] Th. 3).

7.4. Sei $H^*(X, Z_2) = \sum_{q=0}^{\infty} H^q(X, Z_2)$ der Kohomologiering mod 2 des Raumes X . Das $\cup$ -Produkt liefert die multiplikative Struktur. Die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^q(X, Z_2) \rightarrow H^{q+i}(X, Z_2)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) definieren additive Endomorphismen Sq^i von $H^*(X, Z_2)$ mit $Sq^0 = \text{Identität}$ und $Sq^i(H^q(X, Z_2)) = 0$ für $i > q$ [vgl. Fußnote 5) S. 401]. Aus letzterem folgt, daß $Sq^i(c)$ für ein festes $c \in H^*(X, Z_2)$ nur für endlich viele i von 0 verschieden ist. Man kann daher den Endomorphismus $Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$ bilden. Die Cartansche Produktformel [3] (5) besagt, daß Sq auch in bezug auf die multiplikative Struktur von $H^*(X, Z_2)$ ein Endomorphismus ist.

Für jedes $c \in H^*(X, Z_2)$ bezeichne c_q den homogenen Bestandteil vom Grade q , d.h.

$$c = \sum_q c_q, \quad c \in H^q(X, Z_2).$$

Ist $c \neq 0$ und q die kleinste Zahl mit $c_q \neq 0$, so gilt

$$(Sq(c))_q = (Sq^0(c_q))_1 = c_q \neq 0;$$

folglich ist Sq monomorph.

Der Endomorphismus $1 + Sq = \sum_{i=1}^{\infty} Sq^i$ bildet $\sum_{i=q}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ in $\sum_{i=q+1}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ ab. Ist also $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle $i > n$, so ist $(1 + Sq)^{n-1} = 0$. Durch Binomialentwicklung der linken Seite folgt

$$Sq \circ \sum_{v=1}^{n+1} \binom{n+1}{v} (Sq)^{v-1} = 1$$

und damit die Epimorphie von Sq . Zusammenfassend stellen wir fest:

Für einen Raum X mit endlicher Kohomologiedimension (genauer: $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle genügend großen i) ist Sq ein Ringautomorphismus von $H^*(X, Z_2)$.

7.5. Nach Wu [23] läßt sich die Stiefel-Whitneysche Klasse einer Mannigfaltigkeit M^n folgendermaßen aus ihrem Kohomologiering mod 2 und dem Automorphismus Sq bestimmen:

Ist $u_i \in H^i(M^n, Z_2)$, so definiert die Zuordnung $c_{n-i} \rightarrow u_i \cup c_{n-i}$ ($c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2)$) einen Homomorphismus $H^{n-i}(M^n, Z_2) \rightarrow H^n(M^n, Z_2)$. Nach dem Poincareschen Dualitätssatz erhält man auf diese Weise einen Isomorphismus zwischen $H^i(M^n, Z_2)$ und der Gruppe der Homomorphismen von $H^{n-i}(M^n, Z_2)$ in $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$. Sei nun u_i dasjenige Element von $H^i(M^n, Z_2)$, das dem Homomorphismus $Sq^i: H^{n-i}(M^n, Z_2) \rightarrow H^n(M^n, Z_2)$ entspricht, d.h.

$$u_i \cup c_{n-i} = Sq^i(c_{n-i}) \quad \text{für alle } c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2).$$

Wir bilden $u = \sum_{i=0}^n u_i$, das auch durch

$$(5) \quad (u \cup c)_n = (Sq(c))_n \quad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2)$$

definiert werden kann. (Wie in 7.4 bezeichnet der Index n den homogenen Bestandteil vom Grade n .) Nach Wu [23] ist dann $w = Sq(u)$ die *Stiefel-Whitneysche Klasse von M^n* (d.h. $w = \sum_{i=0}^n w_i$, $w_0 = 1 = \text{Einselement des Kohomologierings}$, $w_i = \text{Stiefel-Whitneysche Klasse der Dimension } i \text{ für } i > 0$).

Für eine sphärenähnliche Mannigfaltigkeit M^n ist nach 6.7 Folgerung 1:

$$(Sq(c))_n = (Sq^0(c))_n = c_n \quad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2),$$

also nach (5)

$$u = 1 \quad \text{und} \quad w = Sq(u) = 1.$$

Das zeigt:

Satz 13. *Die Stiefel-Whitneysche Klasse w einer sphärenähnlichen Mannigfaltigkeit ist trivial (d.h. $w = w_0 = 1$, $w_i = 0$ für $i > 0$).*

Insbesondere verschwinden für sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten alle Stiefel-Whitneyschen „Zahlen“, d.h. alle Elemente von $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$, die sich im Kohomologiering $H^*(M^n, Z_2)$ als Polynome in den Stiefel-Whitneyschen Klassen w_i darstellen lassen. Nach THOM [15] Th. IV.10 folgt daraus:

Satz 14. *Jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist (im Sinne von THOM [15] IV. 1) Rand mod 2 einer geeigneten berandeten Mannigfaltigkeit.*

Satz 13 hätte man statt aus 6.7 auch aus 7.2 Satz 12 folgern können: Die Stiefel-Whitneysche Klasse einer einbettbaren Mannigfaltigkeit ist nämlich trivial¹¹⁾, und es gilt:

Satz 15. *Gibt es eine Abbildung $g: M^n \rightarrow M^n$ vom Grade 1 und ist die Stiefel-Whitneysche Klasse w' von M^n trivial, so auch die von M^n .*

¹¹⁾ Beweis. Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1} , $w \in H^*(M^n, Z_2)$ ihre Stiefel-Whitneysche Klasse und $\bar{w} \in H^*(M^n, Z_2)$ die Whitney'sche Klasse des Faserraums der Normalenvektoren von M^n in R^{n+1} . Da dieser Faserraum trivial ist, gilt $\bar{w} = 1$. Nach der Whitney'schen Dualitätsformel (s. Wu [22] Th. II) ist $w \cup \bar{w} = w$ die Whitney'sche Klasse des Faserraums der Tangentenvektoren von R^{n+1} , eingeschränkt auf M^n . Dieser ist ebenfalls trivial, also $w = 1$.

Beweis. Nach der beschriebenen Konstruktion von WU ist $w' = Sq(u')$, wobei u' durch eine zu (5) analoge Formel in $'M^n$ definiert ist. Aus der Voraussetzung $w' = 1$ folgt $u' = 1$, weil Sq ein Automorphismus ist (7.4); also

$$(6) \quad (Sq(c'))_n = (u' \cup c')_n = c'_n \quad \text{für alle } c' \in H^*(M^n, Z_2).$$

$H^*(M^n, Z_2)$ wird nach 7.3.A) durch g^* monomorph in $H^*(M^n, Z_2)$ abgebildet, man kann also $H^*(M^n, Z_2)$ mittels g^* als Unterring in $H^*(M^n, Z_2)$ einbetten. Weil die Sq^i Kohomologieoperationen sind (vgl. 6.7), ist Sq mit dieser Einbettung verträglich, und aus (6) folgt insbesondere

$$(Sq(c))_n = c_n \quad \text{für alle } c \in H^*(M^n, Z_2).$$

Bei der Berechnung der Stiefel-Whitneyschen Klasse w von M^n nach der Wuschen Methode ergibt sich also $u = 1$ [vgl. (5)] und $w = Sq(u) = 1$.

7.6. Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0: H^1(P^3, G) \rightarrow H^3(P^3, \Gamma(G))$, das in 6.8 ein Kriterium für die Sphärenähnlichkeit dreidimensionaler Pseudomannigfaltigkeiten P^3 lieferte (Satz 10), hängt im Spezialfall einer Mannigfaltigkeit $P^3 = M^3$ eng mit den Verschlingungszahlen zusammen. Wir beschränken uns auf den Fall $G = Z_m$ mit geradem m , was durch 6.9 gerechtfertigt wird.

Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung (für die m nicht gerade zu sein braucht): Die exakte Folge

$$0 \rightarrow Z \rightarrow Z \rightarrow Z_m \rightarrow 0,$$

bei der die Injektion $Z \rightarrow Z$ durch Multiplikation mit m gebildet wird, induziert für jeden Raum X exakte Folgen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, in denen die Rand- bzw. Korandhomomorphismen

$$\partial_m: H_i(X, Z_m) \rightarrow H_{i-1}(X, Z)$$

$$\partial_m: H^i(X, Z_m) \rightarrow H^{i+1}(X, Z)$$

auftreten. Wird $a \in H_i(X, Z_m)$ durch die ganzzahlige Kette $\tilde{a}$ mit $\partial \tilde{a} = m \tilde{b}$ (d.h. $\tilde{a}$ ist ein Zykel mod m) repräsentiert, so ist $\partial_m(a)$ die Homologieklassse von $\tilde{b}$. Entsprechendes gilt für δ_m .

Nun sei m gerade und $a \in H^q(X, Z_m)$, repräsentiert durch die ganzzahlige Kokette $\tilde{a}$ mit $\delta \tilde{a} = m \tilde{b}$. Dann ist $\mathfrak{p}_0(a) \in H^{2q+1}(X, Z_{2m})$ die Kohomologieklassse von $\tilde{a} \cup \delta \tilde{a} = m(\tilde{a} \cup \tilde{b})$ (vgl. 6.9). Andererseits ist $a \cup \delta_m(a) \in H^{2q+1}(X, Z_m)^{12}$ die Kohomologieklassse von $\tilde{a} \cup \tilde{b}$. Ist $\mu: Z_m \rightarrow Z_{2m}$ die Multiplikation mit m und wird

$$\mu_*: H^i(X, Z_m) \rightarrow H^i(X, Z_{2m})$$

durch μ induziert, so gilt also

$$(7) \quad \mathfrak{p}_0(a) = \mu_* (a \cup \delta_m(a)).$$

¹²⁾ Hier wird das $\cup$ -Produkt einer Kohomologieklassse mod m mit einer ganzzahligen Kohomologieklassse gebildet. Dem liegt die natürliche Paarung $Z_m \times Z \rightarrow Z_m$ in den Koeffizientengruppen zugrunde.

Falls $X = M^3$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, läßt sich der Ausdruck $a^1 \cup \partial_m(a^1)$, $a^1 \in H^1(M^3, Z_m)$ leicht dualisieren und führt dann zu den Verschlingungszahlen. Bei den Isomorphismen $\flat: H^i(M^3, Z) \rightarrow H_{3-i}(M^3, Z)$ bzw. $\flat: H^i(M^3, Z_m) \rightarrow H_{3-i}(M^3, Z_m)$ des Poincaréschen Dualitätssatzes gehen $\cup$ -Produkte in Schnitte von Homologieklassen (vgl. Gysin [5] (6.11)) und ∂_m geht in ∂_m über (denn benutzt man zur Berechnung der Homologie- und Kohomologiegruppen duale Zellteilungen von M^3 , so ist der Randoperator ∂ dem Korandoperator δ dual). Folglich ist

$$(8) \quad \flat(a^1 \cup \partial_m(a^1)) = \mathfrak{S}(\flat(a^1), \partial_m \flat(a^1)) \cdot c_0, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m).$$

Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Schnittzahl sowohl von Ketten als auch von Homologieklassen. In (8) handelt es sich um die Schnittzahl zwischen einer Homologieklass mod m und einer ganzzahligen Homologieklass; das Ergebnis ist also eine Zahl mod m . c_0 ist die Homologieklass mod m eines Punktes von M^3 . Ist c^3 die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^3(M^3, Z_m)$, so gilt $\flat(c^3) = c_0$, und aus (8) folgt weiter

$$(9) \quad a^1 \cup \partial_m(a^1) = \mathfrak{S}(\flat(a^1), \partial_m \flat(a^1)) \cdot c^3, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m).$$

Zu zwei Elementen $a_1, b_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit endlicher Ordnung gehört eine *Verschlingungszahl* $\mathfrak{V}(a_1, b_1)$. Sie ist eine rationale Zahl mod 1 und wird folgendermaßen definiert: Seien $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1$ punktfremde (singuläre) Zykkel, die a_1 bzw. b_1 repräsentieren, und sei $\partial \tilde{a}_2 = m \tilde{a}_1$. (Weil a_1 endliche Ordnung haben sollte, gibt es eine 2-Kette $\tilde{a}_2$ und eine ganze Zahl m mit dieser Eigenschaft.) Dann wird

$$(10) \quad \mathfrak{V}(a_1, b_1) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(\tilde{a}_2, \tilde{b}_1) \bmod 1$$

gesetzt, und man zeigt, daß $\mathfrak{V}(a_1, b_1) \bmod 1$ von den getroffenen Auswahlen unabhängig ist (vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 77). Ist $a_2 \in H_2(M^3, Z_m)$ die Homologieklass mod m von $\tilde{a}_2$, so gilt $\partial_m(a_2) = a_1$ nach Definition von ∂_m , also kann man (10) auch in der Form

$$(11) \quad \mathfrak{V}(\partial_m(a_2), b_1) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(a_2, b_1) \bmod 1$$

schreiben. Damit geht (9) über in

$$(12) \quad a^1 \cup \partial_m(a^1) = m \cdot \mathfrak{V}(\partial_m \flat(a^1), \partial_m \flat(a^1)) \cdot c^3, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m).$$

Zusammen mit (7) stellt das eine Beziehung zwischen dem Postnikow-Quadrat und der „Eigenverschlingung“ von Elementen aus $H_1(M^3, Z)$ her. Im Hinblick auf das genannte Kriterium für die Sphärenähnlichkeit einer dreidimensionalen Pseudomannigfaltigkeit (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) formulieren wir ausdrücklich:

Satz 16. Für eine Mannigfaltigkeit M^3 verschwindet das Postnikow-Quadrat

$$p_0(Z_{2^k}): H^1(M^3, Z_{2^k}) \leftrightarrow H^3(M^3, Z_{2^k+1})$$

genau dann, wenn für die Eigenverschlingung $\mathfrak{B}(a_1, a_1)$ der Elemente $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit endlicher Ordnung gilt:

$$(13) \quad 2^{k-1} \cdot \mathfrak{B}(a_1, a_1) \equiv 0 \pmod{1} \quad \text{für alle } a_1 \in H_1(M^3, Z) \text{ mit } 2^k \cdot a_1 = 0.$$

[Man beachte: $2^k \cdot \mathfrak{B}(a_1, a_1) \equiv 0 \pmod{1}$ ist für die in (13) betrachteten Elemente a_1 immer erfüllt, weil man bei der Definition (10) von $\mathfrak{B}(a_1, a_1)$ $m = 2^k$ nehmen kann.]

Beweis von Satz 16. $\mathfrak{p}_0(a_1) \in H^3(M^3, Z_{2^{k+1}})$ verschwindet nach (7) genau dann, wenn

$$(14) \quad a^1 \cup \delta_m(a^1) \equiv 0 \pmod{2} \quad (m = 2^k)$$

ist, denn $\mu_*: H^3(M^3, Z_{2^k}) = Z_{2^k} \rightarrow H^3(M^3, Z_{2^{k+1}}) = Z_{2^{k+1}}$ ist die Multiplikation mit $m = 2^k$. (14) ist nach (12) mit

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{B}(\partial_m \mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)) \equiv 0 \pmod{1}$$

äquivalent. Es genügt daher zu zeigen, daß $\partial_m \mathfrak{d}(a^1)$ genau die Elemente $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit $m \cdot a = 0$ durchläuft. Das ergibt sich aber sofort aus der Definition von ∂_m , wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus ist.

7.7. HANTZSCHE gibt in [6] Satz 4 eine notwendige Bedingung für die Einbettbarkeit einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 in den euklidischen Raum R^4 an:

M^3 ist höchstens dann einbettbar, wenn die Torsionsgruppe von $H_1(M^3, Z)$ direkte Summe zweier isomorpher Gruppen ist.

Daraus folgt, daß die dreidimensionalen Linsenräume (p, q) (vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] S. 210, p, q sind teilerfremde natürliche Zahlen mit $0 \leq q \leq \frac{p}{2}$) nicht einbettbar sind, denn $H_1((p, q), Z)$ ist zyklisch von der Ordnung p . Die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p sind aber sphärenähnlich: Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k}): H^1((p, q), Z_{2^k}) \rightarrow H^3((p, q), Z_{2^{k+1}})$ verschwindet in ihnen für jedes k , weil $H^1((p, q), Z_{2^k}) = 0$ ist. Nach 6.9 Satz 11 verschwindet $\mathfrak{p}_0(G)$ dann auch für jede andere Koeffizientengruppe G , und daraus folgt die Sphärenähnlichkeit (6.8 Satz 10). Es gibt also sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten, die nicht einbettbar sind.

Die Linsenräume (p, q) mit geradem p sind dagegen auch nicht sphärenähnlich: Für ein erzeugendes Element b von $H_1((p, q), Z)$ gilt $\mathfrak{B}(b, b) \equiv \pm \frac{q}{p} \pmod{1}$ (s. [9] S. 279). Ist $p = 2^k \cdot r$, $r =$ ungerade und $a = r \cdot b$, so folgt

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{B}(a, a) \equiv \pm 2^{k-1} \cdot \frac{r^2 \cdot q}{p} \equiv \pm \frac{r \cdot q}{2} \not\equiv 0 \pmod{1}$$

(weil q ungerade ist). Andererseits ist $2^k \cdot a = p \cdot b = 0$, also kann $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k})$ nicht verschwinden (7.6 Satz 16) und der Linsenraum (p, q) nicht sphärenähnlich sein (6.8 Satz 10). Auch die Summe M^3 zweier Linsenräume (p, q) und (p, q') mit geradem p (Summe im Sinne von 6.5) ist nicht sphärenähnlich

(6.5 Satz 7) und daher nicht einbettbar (7.1). Die Bedingung von HANTZSCHE ist dagegen für M^3 erfüllt. Man gewinnt also aus unseren Untersuchungen notwendige Bedingungen für Einbettbarkeit, die in manchen Fällen schärfer sind als die von HANTZSCHE. (Allerdings wird bei HANTZSCHE nicht vorausgesetzt, daß es sich um differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Einbettungen handeln soll.)

Literatur

- [1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin: Springer 1935. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I: Structures topologiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] CARTAN, H.: Une théorie axiomatique des carrés de Steenrod. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 425–427 (1950). — [4] FOX, R. H.: Homotopy groups and torus homotopy groups. Ann. of Math. **49**, 471–510 (1948). — [5] GYSIN, W.: Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. **14**, 61–122 (1941/42). — [6] HANTZSCHE, W.: Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume. Math. Z. **43**, 38–58 (1938). — [7] PUPPE, D.: Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders. Math. Z. **61**, 303–323 (1954). — [8] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Z. **69**, 299–344 (1958). — [9] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner 1934. — [10] STEENROD, N. E.: Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. of Math. **48**, 290–320 (1947). — [11] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951. — [12] STEENROD, N. E.: Reduced powers of cohomology classes. Ann. of Math. **56**, 47–67 (1952). — [13] STEENROD, N. E.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213–217 (1953). — [14] STEENROD, N. E.: Cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 217–223 (1953). — [15] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comment. Math. Helv. **28**, 17–86 (1954). — [16] WHITEHEAD, G. W.: On mappings into group-like spaces. Comment. Math. Helv. **28**, 320–328 (1954). — [17] WHITEHEAD, J. H. C.: On C^1 -complexes. Ann. of Math. **41**, 807–824 (1940). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213–245 (1949). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: A certain exact sequence. Ann. of Math. **52**, 51–110 (1950). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On the theory of obstructions. Ann. of Math. **54**, 68–84 (1951). — [21] WHITNEY, H.: The maps of an n -complex into an n -sphere. Duke Math. J. **3**, 51–55 (1937). — [22] WU WEN-TSÜN: On the product of sphere-bundles and the duality theorem modulo two. Ann. of Math. **49**, 641–653 (1948). — [23] WU WEN-TSÜN: Classes caractéristiques et i -carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 508–509 (1950).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)

On a maximal theorem of Hardy and Littlewood and theorems concerning Fourier constants

By

CHEN YUNG-MING

1. Let $f(x)$ be non-negative and L -integrable in the interval $a \leq x \leq b$, and let

$$(1.1) \quad \Theta(x) = \Theta(x; f) = \sup_{\xi} \left\{ \frac{1}{x - \xi} \int_{\xi}^x f(t) dt \right\}, \quad a \leq \xi < x.$$

The following theorem of HARDY and LITTLEWOOD [5] has many important applications in the theory of Fourier series:

THEOREM HL. If $p > 1$, then

$$(1.2) \quad \int_a^b \{\Theta(x)\}^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_a^b \{f(x)\}^p dx.$$

This and similar inequalities later are to be interpreted as: "If the integral on the right is finite, then that on the left is finite and satisfies the inequality."

Alternative proofs of Theorem HL and various extensions to multiple integrals have been given by RIESZ [9], JESSEN, MARCINKIEWICZ, and ZYGMUND [6], RADO [7], WIENER [11], BURKILL [1], FLEET [4], RAUCH [8], SMITH [10]. In the present note, a generalization of this theorem by means of asymptotic approximations of powers is attempted. For simplicity, I shall restrict the discussion to integrals of a single variable.

NOTATIONS. By $\Phi(x) = x\varphi(x)^{1/2}$, we denote the function $\Phi(x)$ such that $\Phi(x)/x^{1-\delta}$ is increasing when x is increasing from zero to infinity, where $\delta > 0$, depending on Φ , is a sufficiently small constant, and that there exists a positive constant $k > 1$, depending on Φ , such that $\Phi(x)/x^k$ is decreasing when x is increasing from zero to infinity. It follows that $(1+\delta)\varphi(x) < \Phi'(x) < k\varphi(x)$, where $\Phi'(x)$ exists almost everywhere in any interval $(0, a)$. By $\Psi(x)$ we denote the non-decreasing positive function $\Psi(x) = x\psi(x)$ such that $\Psi(x)/x^{1-\delta'}$ is decreasing as x is increasing in $(0, a)$, where $\delta' > 0$ is a small constant, depending on Ψ . It follows that $\Psi'(x) \geq 0$, where $\Psi'(x)$ exists almost everywhere and $\Psi'(x) \leq (1-\delta')\psi(x)$.

LEMMA. Let $a \geq 0$,

$$(1.3) \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad (f(t) \geq 0).$$

¹⁾ Here the function $\Phi(x)$ corresponds to the function $\Phi_1(x)$ in [3].

Then

$$(1.4) \quad \int_0^a \frac{\Phi\{F(x)/x\}}{\Psi(x)} dx \leq K_1 \int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)} dx,$$

where $K_1 = K_1(\Phi)$ is a positive constant, depending only on Φ .

PROOF. Let $\{f_n\}$ and $\{F_n\}$ be defined by

$$(1.5) \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x) & (1/n \leq x \leq a) \\ 0 & (0 \leq x < 1/n), \end{cases}$$

$$(1.6) \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt.$$

We have

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx &= \frac{a \Phi\{F_n(a)/a\}}{\Psi(a)} + \int_0^a \frac{F_n(x) \Phi'\{F_n(x)/x\}}{x \Psi(x)} dx + \\ &+ \int_0^a \frac{x \Psi'(x) \Phi\{F_n(x)/x\}}{\{\Psi(x)\}^2} dx - \int_{1/n}^a \frac{f(x) \Phi'\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx \\ &\geq (1 + \delta) \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx - k \int_{1/n}^a \frac{f(x) \varphi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx. \end{aligned} \right.$$

Let $t \geq 1$. Then we have

$$(1.8) \quad f(x) \varphi\{F_n(x)/x\} \leq t^{k-1} \Phi\{f(x)\} + t^{-1} \Phi\{F_n(x)/x\}^2.$$

Substituting this in (1.7), we get

$$(1.9) \quad \delta \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx \leq k t^{k-1} \int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)} dx + k t^{-1} \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx,$$

$$(1.10) \quad (\delta - k t^{-1}) \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx \leq k t^{k-1} \int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)} dx.$$

Now if we take an arbitrarily fixed and sufficiently large value of t , in order to make $\delta - k t^{-1} > 0$, then

$$(1.11) \quad \int_0^a \frac{\Phi\{F_n(x)/x\}}{\Psi(x)} dx \leq K_2 \int_0^a \frac{\Phi\{f(x)\}}{\Psi(x)} dx.$$

Since $K_2 = K_2(\Phi)$ is independent of n , taking the superior limit on the left, we obtain (1.4).

THEOREM 1³⁾. With the same conditions as in Theorem HL,

$$(1.12) \quad \int_a^b \Phi\{\Theta(x)\} dx \leq K_3 \int_a^b \Phi\{f(x)\} dx,$$

where $K_3(\Phi) > 0$ depends on Φ only.

²⁾ Cf. formula (3.10) in [2].

³⁾ The extension of Theorem 1 to multiple integrals may be given in a similar way as in ([6] Theorem 1).

PROOF. By an inequality due to F. RIESZ [9],

$$(1.13) \quad \Theta^*(x; f) \leq \Theta(x; f^*),$$

where $f^*(x)$ is non-increasing, equimeasurable with $f(x)$, and Θ^* is the equimeasurable function of Θ in the same sense. In virtue of the Lemma and by a change of the variable $x = y + a$, we have

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_a^b \Phi\{\Theta(x)\} dx &= \int_a^b \Phi\{\Theta^*(x)\} dx \\ &\leq \int_a^b \Phi\{\Theta(x; f^*)\} dx \\ &= \int_0^{b-a} \Phi\left\{\frac{1}{y} \int_0^y f^*(t+a) dt\right\} dy \\ &\leq K_4 \int_0^{b-a} \Phi\{f(y+a)\} dy \\ &= K_4 \int_a^b \Phi\{f(x)\} dx, \end{aligned} \right.$$

where $K_4 = K_4(\Phi)$. This completes the proof.

The following Theorems 2–5 are immediate consequences of Theorem 1 (the proofs are similar to the arguments given in [12] pp. 246–248, except Theorem HL is replaced by Theorem 1):

THEOREM 2. Suppose that $f(x) \in L(0, 2\pi)$ is of period 2π . Let

$$(1.15) \quad M(x; f) = \sup_{0 < t \leq \pi} \frac{1}{t} \int_0^t |f(x+u)| du = \sup_{0 < t \leq \pi} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u)| du,$$

for $-\pi \leq x \leq \pi$. Then

$$(1.16) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{M(x; f)\} dx \leq K_5 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\} dx, \quad K_5 = K_5(\Phi).$$

THEOREM 3. Let $\chi(t, p)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, be a non-negative function depending on a parameter p and satisfying

$$(1.17) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t, p) dt \leq K_6, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \left| t \frac{\partial}{\partial t} \chi(t, p) \right| dt \leq K_7,$$

where K_6 and K_7 are independent of p . If $f(x)$ is of period 2π ,

$$(1.18) \quad h(x, p) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \chi(t, p) dt;$$

then

$$(1.19) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\left\{\sup_p |h(x, p)|\right\} dx \leq K_8 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\} dx,$$

where K_8 is independent of f .

THEOREM 4. If $N(x; f)$ is the upper bound of $|f(r, x)|$ for $0 \leq r < 1$, where $f(r, x)$ denotes the Poisson integral of an integrable function $f(x) = f(x + 2\pi)$, then

$$(1.20) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{N(x; f)\} dx \leq K_9 \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\} dx,$$

where $K_9 = K_9(\Phi) > 0$, is independent of $f(x)$.

THEOREM 5⁴). Let $\sigma_n^\alpha(x; f)$ be the Cesàro means of order α for the Fourier series of $f(x) = f(x + 2\pi)$. If $N_\alpha(x; f)$, $0 < \alpha \leq 1$, is the upper bound of $|\sigma_n^\alpha(x; f)|$ for $1 \leq n < \infty$, then

$$(1.21) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{N_\alpha(x; f)\} dx \leq K_{10} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi\{|f(x)|\} dx,$$

where $K_{10} = K_{10}(\Phi, \alpha)$ is independent of $f(x)$.

2. Theorems concerning Fourier Constants

THEOREM 6⁵). Let $f(x)$ be defined by

$$(2.1) \quad f(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 + \sum_1^\infty \lambda_n \cos nx,$$

where $\lambda_n \downarrow 0$. Then a necessary condition that $\Phi\{|f(x)|\}/\Psi(x) \in L(0, \pi)$ is

$$\sum_1^\infty \frac{\Phi(n \lambda_n)}{n^2 \Psi(1/n)} < \infty.$$

PROOF. Since

$$(2.2) \quad \lambda_n \leq K_{11} F(\pi/n), \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt,$$

and in virtue of the Lemma, it follows that

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_1^\infty \frac{\Phi(n \lambda_n)}{n^2 \Psi(1/n)} &\leq K_{12} \sum_1^\infty \frac{\Phi\{n F(\pi/n)\}}{n^2 \Psi(1/n)} \\ &\leq K_{12} \sum_1^\infty \frac{\Phi\{n H(\pi/n)\}}{n^2 \Psi(1/n)} \\ &\leq K_{13} \sum_1^\infty \int_{\pi/(n+1)}^{\pi/n} \frac{\Phi\left\{\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt\right\}}{\Psi(x)} dx \\ &\leq K_{14} \int_0^\pi \frac{\Phi\{|f(x)|\}}{\Psi(x)} dx, \end{aligned} \right.$$

where $H(x) = \int_0^x |f(t)| dt$, $K_{14} = K_{14}(\Phi)$.

⁴) Cf. [6], for $\sigma_{m,n}(x, y)$.

⁵) It should be noted that the function Φ in this note corresponds to Φ_1 in [3], cf. Theorem 2 in [3], Theorem 3 and § 7 (d) in [2].

THEOREM 7⁶). Suppose that $f(x)$ is positive and even in $|x| < \pi$, that it is monotonic decreasing in $(0, \pi)$, and that a_n are the Fourier cosine coefficients of f . Then $\Phi\{f(x)\}/\Psi(x)$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$(2.4) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\Phi\{n|a_n|\}}{n^2\Psi(1/n)} < \infty.$$

THEOREM 8⁷). Suppose that $g(x)$ is odd, that it is positive and monotonic decreasing in $(0, \pi)$, and that b_n are the Fourier sine coefficients of $g(x)$. Then $\Phi\{g(x)\}/\Psi(x)$ is integrable $L(0, \pi)$ if and only if

$$(2.5) \quad \sum_1^{\infty} \frac{\Phi\{n|b_n|\}}{n^2\Psi(1/n)} < \infty.$$

The proofs of Theorem 7 and Theorem 8 are similar. For the necessary condition, the arguments are just the same as in Theorem 6. For the sufficient condition, the method is similar to the proof of Theorem 1 in ([3] (3.9), (3.10)).

References

- [1] BURKILL, J. C.: On the differentiability of multiple integrals. J. London Math. Soc. **26**, 244–249 (1951). — [2] CHEN, Y. M.: Some asymptotic properties of Fourier constants and integrability theorems. Math. Z. **68**, 227–244 (1957). — [3] CHEN, Y. M.: Some further asymptotic properties of Fourier constants. Math. Z. **69**, 105–120 (1958). — [4] FLETT, T. M.: Some remarks on a maximal theorem of HARDY and LITTLEWOOD. Quart. J. Math. (Oxford) (2) **6**, 275–282 (1955). — [5] HARDY, G. H., and J. E. LITTLEWOOD: A maximal theorem with function-theoretic applications. Acta math. **54**, 81–116 (1930). — [6] JESSEN, B., J. MARCINKIEWICZ and A. ZYGMUND: Note on the differentiability of multiple integrals. Fund. Math. **25**, 217–234 (1935). — [7] RADO, R.: A new proof of a theorem of HARDY and LITTLEWOOD. J. London Math. Soc. **11**, 87–92 (1936). — [8] RAUCH, H. E.: Harmonic and analytic functions of several variables and the maximal theorem of HARDY and LITTLEWOOD. Canadian J. Math. **8**, 171–183 (1956). — [9] RIESZ, F.: Sur un théorème de maximum de MM. HARDY et LITTLEWOOD. J. London Math. Soc. **7**, 10–13 (1932). — [10] SMITH, K. T.: A generalization of an inequality of HARDY and LITTLEWOOD. Canadian J. Math. **8**, 157–170 (1956). — [11] WIENER, N.: The ergodic theorem. Duke Math. J. **5**, 1–18 (1939). — [12] ZYGMUND, A.: Trigonometrical Series. Warszawa-Lwów 1935.

⁶) This is a generalization of Theorem 7 in [3].

⁷) Cf. Theorem 8 in [3].

Dept. of Math., University of Hongkong, Hongkong

(Eingegangen am 2. November 1957)

On Products of Summability Methods

By

M. S. RAMANUJAN

INTRODUCTION. The present paper is a continuation of an earlier paper by me [9], concerned with the question: Given a sequence summable by the method A , can we say that a regular B -transform of the sequence is also A -summable, to the same limit as before? This question raised by Szász [12] has been answered in the affirmative when i) A is the Abel method and B is a regular sequence-to-sequence Hausdorff transform [3, 6, 13], ii) A is Borel's exponential method and B is a regular Hausdorff sequence-to-sequence method [1, 13], and iii) A is the Abel method and B is the Hardy-Littlewood-Fekete circle method, which is essentially a quasi-Hausdorff method [13]. The particular case of ii) above, where A is the BOREL's exponential method and B is the Cesàro's method (C, k) has been considered earlier by HARDY and LITTLEWOOD (see, for example, HARDY [2], Theorem 146). RAJAGOPAL ([8], Theorem I) has subsequently extended the results i) and ii) to the case in that A is a suitably restricted power series method and B is a regular Hausdorff method, while the result iii) above has been extended by me in [9] to the case where A is Abel's method and B is a regular quasi-Hausdorff method. RAJAGOPAL ([8], Theorem II) has also obtained a functional analogue of his extended theorem for sequences, generalising a product theorem first proved by him ([7], Lemma 4) in which A and B are respectively the Laplace-Abel and the (C, k) methods for functions. In a recent paper, PARAMESWARAN [5] has proved that if A is a regular Nörlund method and B is a method of the Nörlund type then the question has an answer in the affirmative.

The object of the present paper is to show how my earlier theorems on the product of Abel and quasi-Hausdorff methods, quoted here as Theorems 1 and 2, and proved in [9] for the class of bounded sequences, are in fact valid, without much alteration in the proof, for a wider class of sequences. This result is contained in Theorem 1'. Also, alternative proofs of Theorems 1 and 2 are given in the paper and the main interest in giving them is to adapt the same to prove a result, on the product of Borel and regular quasi-Hausdorff methods, contained in Theorem 3.

In § 2 I prove a theorem on the product of Abel's method and the method (S^*, μ) , defined earlier by me in [11]. The method S_α of MEYER-KÖNIG [4] is a special case of this class of methods and therefore the result in Theorem 4 may be of some interest, since SZÁSZ's result on the product of Abel and S_α -methods, indicated without proof in [13], is now a special case of Theorem 4.

§ 1

We start with recalling the following two theorems proved earlier (Theorems 1 and 2, [9]¹).

THEOREM 1. *Let $\sum a_n$ be any series belonging to the class $\mathfrak{B}$ of series with bounded partial sums. If $\sum a_n$ is summable to l by Abel's method, then the transform $\sum b_n$ of the series, given by any quasi-Hausdorff α_0 -matrix is also summable to l by Abel's method.*

THEOREM 2. *Let s_n ($n=0, 1, 2, \dots$) be a bounded sequence summable to l by Abel's method. Then a regular transform t_n ($n=0, 1, 2, \dots$) of $\{s_n\}$ by the method (H_2^*, μ) with moment constants $\{\mu_n\}$, is also summable to l by Abel's method.*

In what follows we assume the existence of the transform $\sum b_n$ of the series $\sum a_n$ by the α_0 -matrix (H^*, μ_n) or equivalently that of the sequence $\{t_n\}$ of partial sums of $\sum b_n$ as the transform of the sequence $\{s_n\}$ of partial sums of $\sum a_n$ by the T -matrix (H^*, μ_{n+1}) , and therefore the equation (6) of [9] connecting $\{t_n\}$ and $\{s_n\}$.

Let us suppose that the sequence $\{s_n\}$ is not necessarily bounded; however, it is subject to the following restrictions which are analogous to those imposed, in an earlier paper on a similar topic, by RAJAGOPAL (Theorem 1, [8]).

For every u in $0 < u < 1$,

i) *there exists a function $F(x)$, finite for every x in $0 < x < 1$, such that,*

$$(1-x) \sum_k |s_k| (1-u+xu)^k u \leq F(x), \quad 0 < x < 1,$$

and ii) $|(1-x) \sum_k s_k (1-u+xu)^k u| \leq M(u)$, where $M(u)$ is integrable in $(0, 1)$.

It may also be easily seen that when the series $\sum a_n$ is Abel-summable, we have that for every u in $0 < u < 1$,

$$\text{iii) } (1-x) \sum_k |s_k| (1-u+xu)^k u$$

converges for $0 < x < 1$.

Now when the sequence satisfies conditions i) and iii) above, the interchange in the order of summation in the expression on the right hand side of equation (7) of [9], yielding in consequence equation (8), is valid. Condition ii) validates the application of the theorem of dominated convergence, as done earlier, and therefore, we have after the proof of Theorem 1 of [9] the following theorem.

THEOREM 1'. *Let $\sum a_n$ be any series whose partial sums $\{s_n\}$ satisfy the conditions i) and ii) above. Then if the series is Abel summable to l then so is the transform $\sum b_n$ of the series by a quasi-Hausdorff α_0 -matrix.*

¹) Throughout the paper we follow the same notations and definitions as in the earlier paper [9].

NOTE. It is easily seen that the class of bounded sequences is a subclass of the sequences satisfying conditions i) and ii) above and therefore Theorem 1 is a special case of Theorem 1'.

A similar statement holds for Theorem 2.

We shall now give alternative proofs of Theorem 1 and 2. In the course of our proofs we require the following lemma, proved in (Theorem 3, [10]).

LEMMA A. Let (H^*, r_n) and (H^*, μ_n) be two α_0 -matrices. If $\sum a_n$ of the class $\mathfrak{B}$ is summable to l by the quasi-Hausdorff method (H^*, r_n) then the (H^*, μ_n) -transform of $\sum a_n$ is also (H^*, r_n) -summable to l .

PROOF OF THEOREM 1. By hypothesis $\sum a_n$ belongs to the class $\mathfrak{B}$; i.e. $s_n = O(1)$. Also it is Abel summable to l . Therefore by the well-known Tauberian theorem for Abel summability, due to LITTLEWOOD (see HARDY [2], Theorem 92) $\{s_n\}$ is summable to l by Hölder's method $(H, 1)$. By another theorem, due to HARDY and LITTLEWOOD ([2], Theorem 77) the $(H, 1)$ summability of $\sum a_n$ to l is equivalent to the convergence to l of the series $\sum b_n$ where

$$b_n = \frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n+1}}{n+2} + \dots$$

i.e. to the summability to l of the series $\sum a_n$ by the α_0 -matrix (H^*, r_n) , $r_n = \frac{1}{n+1}$.

Now, by Lemma A, we have that the transform of $\sum a_n$ by any α_0 -matrix (H^*, μ_n) is also summable to l by the method (H^*, r_n) and therefore the transform is again $(H, 1)$ summable and consequently Abel summable to l and this completes the proof of Theorem 1.

A similar proof may be given for Theorem 2.

The originally given methods of proof of Theorems 1 and 2 when applied to prove analogous results in the case when Borel's method of exponential means replaces the Abel method give rise to considerable difficulty in the simplifications of the summations involved. The present proof, when applied to the latter case, obviates these difficulties and we have the theorem below.

THEOREM 3. Let $\sum a_n$ be any series belonging to the class $\mathfrak{B}$ of series with bounded partial sums. If $\sum a_n$ is summable to l by Borel's method, then the transform $\sum b_n$ of the series given by any quasi-Hausdorff α_0 -matrix is also summable to l by Borel's method.

The proof of the theorem is similar to the above proof for Theorem 1. Only, in this case we use Lemma B below in the place of Littlewood's Tauberian theorem.

LEMMA B. If $s_n = O(1)$, then the method of Borel's means is equivalent to the method T_α for $0 < \alpha < 1$.

The above lemma is due to MEYER-KÖNIG ([4], Satz 25). It may be noted that the method T_α is defined by the quasi-Hausdorff α_0 -matrix (H^*, r_n) , $r_n = (1-\alpha)^n$.

§ 2

We now prove a theorem on the product of Abel's method and the method (S^*, μ) defined by me in [II] as the method of transforming $\{s_n\}$ to $\{t_n\}$ by the matrix $S^* \equiv (S^*, \mu)$ whose elements are

$$s_{nk}^* = \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1},$$

so that

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \Delta^k \mu_{n+1} s_k.$$

With this definition we prove

THEOREM 4. *Let $\{s_n\}$ be any sequence summable to l by Abel's method. Then the sequence $\{t_n\}$ obtained as the transform of the sequence $\{s_n\}$ by the regular method (S^*, μ) is also Abel summable to l in all cases where $\{s_n\}$ satisfies the following condition:*

i) *for every u in $0 < u < 1$, there exists a function $F(x)$ finite for every x in $0 < x < 1$ such that*

$$\frac{u}{1-xu} \sum_k |s_k| \left(\frac{1-u}{1-xu} \right)^k \leq F(x), \quad (0 < x < 1).$$

In the proof of the theorem we require the following lemma.

LEMMA C. *The sequence-to-sequence transformation defined by the matrix $S^* \equiv (S^*, \mu)$ is regular if, and only if,*

i) μ_n is a moment constant, generated by $\chi(u)$ say,

ii) $\chi(1) = \chi(+0)$,

and iii) $\int_{+0}^1 d\chi = 1$.

The proof of the lemma is given in [II].

PROOF OF THE THEOREM. By hypothesis the transformation defined by (S^*, μ) is regular and therefore $\{\mu_n\}$ satisfies the conditions of Lemma C. Since a change in the value of $\chi(u)$ at $u=0$ will alter only the value of μ_0 and the (S^*, μ) matrix is independent of μ_0 we may, without loss of generality, assume that $\chi(0) = \chi(+0) = 0$ and consequently $\int_0^1 d\chi = 1$.

Let $\{t_n\}$ denote the transformation of $\{s_n\}$ by the (S^*, μ) -matrix; then by virtue of the regularity of (S^*, μ) we have

$$t_n = \sum_k \binom{n+k}{k} s_k \int_0^1 (1-u)^k u^{n+1} d\chi(u).$$

Therefore

$$(2.1) \quad \sum_n t_n x^n = \sum_n x^n \sum_k \int_0^1 \binom{n+k}{k} (1-u)^k u^{n+1} s_k d\chi(u).$$

Replacing each term on the right of the above expression by its modulus and assuming, as we may, that $\chi(u)$ is increasing, the right hand member with these changes is

$$\begin{aligned}
 & \sum_n x^n \sum_k \int_0^1 \binom{n+k}{k} (1-u)^k \cdot u^{n+1} |s_k| d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 \sum_n \sum_k \binom{n+k}{k} (1-u)^k u^{n+1} x^n |s_k| d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 \sum_k (1-u)^k \cdot u \cdot |s_k| \sum_n \binom{n+k}{k} (xu)^n d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 \sum_k |s_k| (1-u)^k \cdot u \cdot \left[\frac{1}{1-xu} \right]^{k+1} d\chi(u), \quad (0 < x < 1) \\
 &= \int_0^1 \sum_k |s_k| \cdot \binom{u}{1-xu} \left[\frac{1-u}{1-xu} \right]^k d\chi(u).
 \end{aligned}$$

Now, by virtue of Abel summability of the sequence $\{s_n\}$ the integrand above is absolutely convergent for every u in $0 < u < 1$ and now, this along with the condition i) of the theorem gives that the sum above is finite. Therefore an interchange in the order of the summations and the integral in (2.1) is possible and we have

$$(1-x) \sum_n t_n x^n = \int_0^1 (1-x) \sum_k s_k \left(\frac{u}{1-xu} \right) \left[\frac{1-u}{1-xu} \right]^k d\chi(u).$$

Putting now $x = 1 - \frac{1}{y}$ we have $x \rightarrow 1-0$ as $y \rightarrow \infty$. Also let $f(x) = (1-x) \sum_n s_n x^n = \frac{1}{y} \sum_n s_n \left(1 - \frac{1}{y} \right)^n = g(y)$, say. Let $\bar{f}(x) = (1-x) \sum_n t_n x^n = G(y)$, say. Then

$$\begin{aligned}
 G(y) &= \bar{f}(x) = (1-x) \sum_n t_n x^n \\
 &= \int_0^1 (1-x) \sum_k s_k \left(\frac{u}{1-xu} \right) \left[\frac{1-u}{1-xu} \right]^k d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{y} \sum_k s_k \frac{yu}{y-yu+u} \left[\frac{y(1-u)}{y-yu+u} \right]^k d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{y-yu+u}{u} \right)^{-1} \sum_k s_k \left(1 - \frac{u}{y-yu+u} \right)^k d\chi(u) \\
 &= \int_0^1 g \left[1 + \frac{y(1-u)}{u} \right] d\chi(u).
 \end{aligned}$$

The proof of the theorem will be complete if we now show that $g(y) \rightarrow l$ implies $G(y) \rightarrow l$, $y \rightarrow \infty$.

Again it will be sufficient to prove the result for $l=0$ and increasing $\chi(u)$. Here again it may be pointed out that the equation $\chi(1) = \chi(1-0)$ may be made valid for the monotonic functions into which the original χ has been split up.

If $g(y) \rightarrow 0$ then given $\varepsilon > 0$ we can find a $Y > 1$ such that $|g(y)| \leq \varepsilon$ for $y \geq Y$. Let K denote the upper bound of $g(y)$ in $1 \leq y \leq Y$. Then

$$\begin{aligned} |G(y)| &\leq \int_0^1 \left| g \left[1 + \frac{y(1-u)}{u} \right] \right| d\chi(u) \\ &= \int_0^{y/(y+Y-1)} \left| g \left[1 + \frac{y(1-u)}{u} \right] \right| d\chi(u) + \int_{y/(y+Y-1)}^1 \left| g \left[1 + \frac{y(1-u)}{u} \right] \right| d\chi(u) \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 d\chi + K \left[\chi(1) - \chi \left(\frac{y}{y+Y-1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Now choose Y_1 such that

$$K \left[\chi(1) - \chi \left(\frac{y}{y+Y-1} \right) \right] < \varepsilon \quad \text{for } y > Y_1.$$

This is possible since $\chi(1-0) = \chi(1)$. Then

$$|G(y)| \leq \left(\int_0^1 d\chi + 1 \right) \varepsilon, \quad \text{for } y > Y_1,$$

which proves the theorem.

NOTE. The method S_x of MEYER-KÖNIG [5] is easily seen to be a (S^*, μ) -method, with $\mu_n = (1-\alpha)^n$ and consequently regular for $0 < \alpha < 1$. Now the result of SZÁSZ [13] on the product of Abel and S_x -methods is a corollary of Theorem 4.

In conclusion I wish to thank Professors C. T. RAJAGOPAL and V. GANAPATHY IYER for their help and guidance in the preparation of this paper and the referee for his valuable criticism.

References

- [1] AMIR, A. (JAKIMOVSKI): Some relations between the methods of summability of Abel, Borel, Cesàro, Hölder and Hausdorff: *J. Analyse Math.* **3**, 346–384 (1953/54). — [2] HARDY, G. H.: *Divergent Series*. Oxford 1949. — [3] HAUSDORFF, F.: Die Äquivalenz der Hölderschen und Cesàroschen Grenzwerte negativer Ordnung. *Math. Z.* **31**, 186–196 (1930). — [4] MEYER-KÖNIG, W.: Untersuchungen über einige verwandte Limitierungsverfahren. *Math. Z.* **52**, 257–304 (1950). — [5] PARAMESWARAN, M. R.: Some product theorems in summability. *Math. Z.* **68**, 19–26 (1957). — [6] PATI, T.: Products of summability methods. *Proc. Nat. Inst. Sci. India, Sec. A* **20**, 348–351 (1954). — [7] RAJAGOPAL, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series. *Amer. J. Math.* **69**, 371–378 (1947). — [8] RAJAGOPAL, C. T.: Theorems on the product of two summability methods with applications. *J. Indian Math. Soc. (New Ser.)* **18**, 89–105 (1954). — [9] RAMANUJAN, M. S.: Theorems on the product of quasi-Hausdorff and Abel transforms. *Math. Z.* **65**, 442–447 (1956). — [10] RAMANUJAN, M. S.: A note on quasi-Hausdorff series-to-series transformations. *J. London Math. Soc.* **32**, 27–32 (1957). — [11] RAMANUJAN, M. S.: On Hausdorff and quasi-Hausdorff methods of summability. *Quart. J. Math.* **8**, 197–213 (1957). — [12] SZÁSZ, O.: On products of summability methods. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3**, 257–263 (1952). — [13] SZÁSZ, O.: On the product of two summability methods. *Ann. Soc. Polon. Math.* **25**, 75–84 (1952/53).

Ramanujan Institute of Mathematics, University of Madras, Madras-5

(Eingegangen am 21. Januar 1958)

On Algebras for which Every Faithful Representation is its Own Second Commutator

By
 KIITI MORITA

INTRODUCTION. Taking up some of the most important properties of quasi-Frobenius (QF) algebras, R. M. THRALL [3] gave the following definitions. Let A be a finite dimensional (associative) algebra (over a commutative field) which has a unit element.

QF-1 Algebra. A is said to be a QF-1 algebra if every faithful representation of A coincides with its own second commutator.

QF-2 Algebra. A is said to be a QF-2 algebra if every primitive left ideal of A as well as every primitive right ideal of A has a unique minimal subideal.

QF-3 Algebra. A is said to be a QF-3 algebra if it has a unique minimal faithful representation⁰⁾.

Here a faithful representation $\mathfrak{D}$ of A is said to be a minimal faithful representation of A if deletion of any direct constituent of $\mathfrak{D}$ leaves a non-faithful representation. Minimal faithful left A -modules are defined similarly.

In the paper [3] referred to above, THRALL has proved that the class of QF-1 algebras properly contains the class of QF algebras and that the class of QF-3 algebras properly contains the class of QF-2 algebras. The example given by him to show the former fact is a generalized uni-serial algebra and hence it is a QF-2 algebra. In this connection he has raised the problem: "Is every QF-1 algebra also a QF-2 algebra (or also a QF-3 algebra)?"

In this paper we shall establish a necessary and sufficient condition for an algebra A to be a QF-1 algebra (§ 1). In case A is a QF-3 algebra, THRALL [3] has given a condition which is necessary for A to be a QF-1 algebra. His condition can be deduced as an immediate consequence of our condition but it is not a sufficient condition for A to be QF-1 as will be shown by an example.

As for THRALL's problem mentioned above we can give a solution to it. Indeed it will be shown in § 2 that there exists a QF-1 algebra which is not QF-3¹⁾ and that there exists a QF-1 algebra which is QF-3 but not QF-2. Thus there is no intimate relation between QF-1 algebras and QF-3 algebras (or QF-2 algebras), since QF-3 algebras (or QF-2 algebras) are not necessarily QF-1 algebras as was observed by THRALL.

⁰⁾ As for QF-3 algebras, cf. also [1] in which we have shown how to obtain QF-3 algebras.

¹⁾ I have learned from T. YOSHII that M. IKEDA reported the existence of such an algebra, but his result has not yet been published and I could have no access to it.

Throughout this paper any algebra under consideration is assumed to have a unit element and to have a finite dimension over the ground field. For an algebra A , by a left A -module we shall mean a finitely generated left A -module on which the unit element of A acts as the identity operator. If U is a left A -module, we shall denote by $U^{(n)}$ a left A -module which is the direct sum of n copies of U .

§ 1. QF-1 algebras

We shall first prove the following theorem.

THEOREM 1.1. *Let A be an algebra and U a faithful left A -module such that any B -endomorphism of U is obtained by the left multiplication of an element of A where B is the A -endomorphism ring of U and is considered as a right operator domain of U . Let V be an indecomposable left A -module and C the A -endomorphism ring of the left A -module $W = U \oplus V$ (direct sum). Then the following three statements are equivalent.*

I. Any C -endomorphism of W is obtained by the left multiplication of an element of A .

II. If we denote by V_1 the A -submodule of V generated by elements which are images of elements of U under A -homomorphisms of U into V and denote by V_0 the set of elements of V which are contained in the kernel of every A -homomorphism of V into U , then we have either $V = V_1$ or $V_0 = 0$.

III. There exists a positive integer n such that V is A -isomorphic either to a quotient module of $U^{(n)}$ or to an A -submodule of $U^{(n)}$ (for the meaning of $U^{(n)}$ cf. Introduction).

Proof. i) I $\rightarrow$ II. Assume that $V \neq V_1$ and $V_0 \neq 0$. Let λ (resp. μ) be the projection of the left A -module W onto U (resp. V). Then we have $B = \lambda C \lambda$. If we set $D = \mu C \mu$, D is the A -endomorphism ring of V . It is obvious that V_1 and V_0 are two-sided A - D -modules where D (resp. C) is considered as a right operator domain of V (resp. W).

Since V is finitely generated and indecomposable as a left A -module, the radical $N(D)$ of D is nilpotent and $\bar{D} = D/N(D)$ is a skew field. If we set $V_1^* = V_1 + VN(D)$, then V_1^* is a two-sided A - D -module. Since $N(D)$ is nilpotent and $V \neq V_1$, we have $V \neq V_1^*$. Therefore V/V_1^* is a non-zero two-sided A - $\bar{D}$ -module.

Let us set $V_0^* = \{v | vN(D) = 0, v \in V_0\}$. Then V_0^* is a two-sided A - $\bar{D}$ -module and, since $V_0 \neq 0$, we have $V_0^* \neq 0$.

Thus V/V_1^* and V_0^* are non-zero right $\bar{D}$ -modules. Since $\bar{D}$ is a skew field, there exists a non-zero $\bar{D}$ -homomorphism of V/V_1^* into V_0^* and hence there exists a non-zero D -homomorphism φ of V into V such that

$$(1) \quad \varphi(v) = 0 \quad \text{for } v \in V_1^*,$$

$$(2) \quad \varphi(v) \in V_0^* \quad \text{for } v \in V.$$

Since φ is a non-zero D -homomorphism, there exist $v_1 \in V$ and $v_0 \in V_0^*$ such that

$$(3) \quad \varphi(v_1) = v_0 \neq 0.$$

Now we set

$$(4) \quad \Phi(w) = \varphi(w\mu) \quad \text{for } w \in W.$$

Here it is to be noted that μ is the projection from the left A -module W onto the left A -module V .

We shall prove that Φ is a C -endomorphism of W . For this purpose it is sufficient to prove

$$(5) \quad \Phi(wc) = \Phi(w)c \quad \text{for } w \in W, c \in C.$$

To prove (5) it is sufficient to prove

$$(6) \quad \Phi(uc) = \Phi(u)c = 0 \quad \text{for } u \in U, c \in C,$$

$$(7) \quad \Phi(vc) = \Phi(v)c \quad \text{for } v \in V, c \in C;$$

because if (6) and (7) hold we have $\Phi(wc) = \Phi(w\lambda c + w\mu c) = \Phi(w\lambda c) + \Phi(w\mu c) = \Phi(w\mu)c = (\Phi(w\mu) + \Phi(w\lambda))c = \Phi(w\mu + w\lambda)c = \Phi(w)c$.

Let $u \in U$ and $c \in C$. Then, since $u\mu = 0$, we have $\Phi(u) = \varphi(u\mu) = 0$. On the other hand, we have $\Phi(uc) = \varphi(uc\mu)$ and, since $uc\mu \in V_1$ by definition of V_1 and $V_1 \subseteq V_1^*$, we obtain $\varphi(uc\mu) = 0$ by (1). Thus we have $\Phi(uc) = 0$ and (6) is proved.

Let $v \in V$ and $c \in C$. Then we have $\Phi(vc) = \varphi(vc\mu) = \varphi(v\mu c\mu) = \varphi(v)\mu c\mu$. On the other hand, $\varphi(v) \in V_0^*$ and $V_0^* \subseteq V_0$, and hence $\varphi(v) \in V_0$. By the definition of V_0 we have $\varphi(v)c\lambda = \varphi(v)\mu c\lambda = 0$ since $\mu c\lambda$ is considered as an A -homomorphism of V into U . Therefore we obtain $\Phi(v)c = \varphi(v)c = \varphi(v)\mu c = \varphi(v)\mu c\lambda + \varphi(v)\mu c\mu = \varphi(v)\mu c\mu$. Hence $\Phi(v)c = \Phi(vc)$ and (7) is proved. Thus we have proved that Φ is a C -endomorphism of W .

Next we shall prove that there exists no element a of A such that $\Phi(w) = aw$ for every element w of W . To prove this, suppose that there exists such an element a of A . Since $\Phi(v_1) = \varphi(v_1) = v_0 \neq 0$, we have $a \neq 0$. Since U is a faithful left A -module, there exists an element u of U such that $au \neq 0$. On the other hand, we have $\Phi(u) = 0$ from (6). This is a contradiction. Therefore the statement I does not hold. This proves that I implies II.

ii) II $\rightarrow$ III. Assume that II holds. We distinguish two cases.

Case a) $V = V_1$. In this case, since the maximum condition holds for A -submodules of V , there exist a finite number of elements $u_i^* \in U$, $i = 1, \dots, n$ and a finite number of A -homomorphisms φ_i of U into V , $i = 1, \dots, n$ such that $V = Av_1 + \dots + Av_n$, $v_i = \varphi_i(u_i^*)$, $i = 1, \dots, n$. Let us form $U^{(n)}$ and set

$$\varphi((u_1, \dots, u_n)) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(u_i) \quad \text{for } (u_1, \dots, u_n) \in U^{(n)}.$$

Then φ is an A -homomorphism of $U^{(n)}$ onto V , since if $v = \sum a_i v_i$ then $\varphi((a_1 u_1^*, \dots, a_n u_n^*)) = v$.

Case b) $V_0 = 0$. In this case, since the minimum condition holds for A -submodules of V , there exist a finite number of A -homomorphisms ψ_i of V

into U , $i=1, \dots, n$ such that $\bigcap_{i=1}^n \text{Kernel } \psi_i = 0$. If we set

$$\psi(v) = (\psi_1(v), \dots, \psi_n(v)) \quad \text{for } v \in V,$$

then ψ is an A -homomorphism of V into $U^{(n)}$ and moreover ψ is an A -isomorphism since $\text{Kernel } \psi = \bigcap \text{Kernel } \psi_i = 0$.

Thus the implication $\text{II} \rightarrow \text{III}$ is proved.

iii) $\text{III} \rightarrow \text{II}$. This implication is proved by reversing the arguments of ii).

iv) $\text{II} \rightarrow \text{I}$. Assume that II holds. Let Φ be any C -endomorphism of W . We set $\psi(u) = \Phi(u)$ for $u \in U$. Then ψ is a B -endomorphism of U where $B = \lambda C \lambda$ and λ is the projection of W onto U . From the hypothesis of the theorem it follows that there exists an element a of A such that $\psi(u) = au$ for every element u of U . We set

$$\Phi'(w) = \Phi(w) - aw \quad \text{for } w \in W.$$

Then we have $\Phi'(u) = 0$ for $u \in U$. To prove that $\Phi'(v) = 0$ for $v \in V$, we distinguish two cases.

Case a) $V = V_1$. In this case, for any element v of V there exist a finite number of elements $u_i \in U$, $c_i \in C$, $i = 1, \dots, n$ such that $v = \sum u_i c_i$. Hence we have $\Phi'(v) = \sum \Phi'(u_i) c_i = 0$.

Case b) $V_0 = 0$. In this case we have also $\Phi'(v) = 0$ for all $v \in V$. Suppose that there exists an element v of V such that $\Phi'(v) \neq 0$. Then from the assumption that $V_0 = 0$ we conclude that there exists an element c of C such that $\Phi'(v) c \lambda \neq 0$. Since $vc \lambda \in U$, we have $\Phi'(v) c \lambda = \Phi'(vc \lambda) = 0$. This is a contradiction.

Thus we have proved that $\Phi'(v) = 0$ for all $v \in V$ in all cases. Therefore we have $\Phi' = 0$ and $\Phi(w) = aw$ for all $w \in W$. This proves that I holds.

We are now in a position to establish the following theorem.

THEOREM 1.2. *Let A be an algebra and $\{\mathfrak{U}_\alpha\}$ the totality of inequivalent minimal faithful representations of A . In order that A be a QF-1 algebra it is necessary and sufficient that A satisfy the following two conditions:*

1° *The second commutator algebra of $\mathfrak{U}_\alpha$ coincides with $\mathfrak{U}_\alpha$ itself for each α .*

2° *For any indecomposable left A -module V and for each α , there exists a positive integer n such that V is A -isomorphic either to a quotient module of $U_\alpha^{(n)}$ or to an A -submodule of $U_\alpha^{(n)}$ where U_α is a left representation module for $\mathfrak{U}_\alpha$ and $U_\alpha^{(n)}$ is the direct sum of n copies of U_α .*

Proof. It is obvious that 1° is a necessary condition for A to be a QF-1 algebra. Let V be any indecomposable left A -module. If the representation of A defined by taking the left A -module $U_\alpha \oplus V$ (direct sum) as a representation module is its own second commutator, then by Theorem 1.1 we see that 2° holds for this α . Thus 2° is also a necessary condition for A to be QF-1.

Suppose that the conditions 1° and 2° are satisfied. Let W be any faithful left A -module. Then there exists some α such that $W \approx V_1 \oplus \dots \oplus V_n \oplus U_\alpha$

where V_i ($i=1, \dots, n$) are indecomposable left A -modules. It follows from Theorem 1.1 that the representation of A defined by the representation module $U_\alpha \oplus V_1$ is its own second commutator. Then by applying Theorem 1.1 to $U_\alpha \oplus V_1$ and V_2 we see again that the representation of A defined by the representation module $(U_\alpha \oplus V_1) \oplus V_2$ is its own second commutator. By repeated application of Theorem 1.1 we see finally that the representation of A defined by the representation module W is its own second commutator. Thus our theorem is completely proved.

As an immediate consequence of Theorem 1.2 we obtain the following theorem²⁾.

THEOREM 1.3. *Let A be a QF-3 algebra and $\mathfrak{U}$ its unique minimal faithful representation. Then the following two conditions are necessary and sufficient in order that A be a QF-1 algebra:*

1° *The second commutator algebra of $\mathfrak{U}$ coincides with $\mathfrak{U}$ itself.*

2° *For any indecomposable left A -module V there exists a positive integer n such that V is A -isomorphic either to a quotient module of $U^{(n)}$ or to an A -submodule of $U^{(n)}$ where U is a left representation module for $\mathfrak{U}$.*

THEOREM 1.4. *Let A be a QF-3 algebra and $\mathfrak{U}$ its unique minimal faithful representation. If A is a QF-1 algebra then the following condition holds:*

3° *Every irreducible representation of A appears either as top or bottom constituent of $\mathfrak{U}$.*

This theorem is due to R. M. THRALL [3] and follows directly from Theorem 1.3. From the example below it is seen that THRALL's condition is not sufficient for an algebra to be QF-1.

EXAMPLE 1.5. Let K be a commutative field. We shall consider the subalgebra A of the full matrix ring $(K)_7$ which is generated by the elements

$$e_1 = c_{11} + c_{22} + c_{33}, \quad e_2 = c_{44} + c_{55}, \quad e_3 = c_{66} + c_{77},$$

$$c_{31}, c_{37}, c_{51}, c_{57}, c_{64}, c_{24} + c_{35}, c_{62} + c_{71},$$

where c_{ik} are matrix units in $(K)_7$. The algebra A is generalized uni-serial and satisfies the conditions 1° in Theorem 1.3 and 3° in Theorem 1.4. Since $V = Ae_3/Ne_3$ does not satisfy condition 2° in Theorem 1.3 where $U = Ae_1 \oplus Ae_2$ and N means the radical of A , A is not a QF-1 algebra.

§ 2. THRALL's problem

The following two examples give a complete solution to THRALL's problem mentioned in Introduction. In the following K is assumed to be a commutative field and c_{ik} mean matrix units in the full matrix ring $(K)_n$ for $n=6$ or 10.

²⁾ Recently H. TACHIKAWA [2] has extended the notion of QF-3 algebras to the case of rings with minimum condition. Our theorems in § 1 are also true for rings with minimum condition if we deal with modules instead of representations and understand QF-1 rings and QF-3 rings in his sense.

EXAMPLE 2.1. Let A be the subalgebra of the full matrix ring $(K)_6$ over K such that the elements

$$e_1 = c_{11} + c_{66}, e_2 = c_{22} + c_{55}, e_3 = c_{33} + c_{44}, \\ c_{21}, c_{31}, c_{64}, c_{65}$$

form a K -basis of A . If we denote by $J(Y)$ the dual representation module of a right A -module Y , the totality of non-isomorphic minimal faithful left A -modules is

$$A, J(A), Ae_1 \oplus J(e_1A), Ae_2 \oplus Ae_3 \oplus J(e_2A) \oplus J(e_3A).$$

By calculation we see that the representation of A defined by each of these modules is its own second commutator. Any indecomposable left A -module which is not simple is either projective or injective. Hence we see by Theorem 1.2 that A is a QF-1 algebra. On the other hand, A is not a QF-3 algebra.

EXAMPLE 2.2. Let A be the subalgebra of the full matrix ring $(K)_{10}$ over K such that the elements

$$e_1 = c_{11}, e_2 = c_{22} + c_{55}, e_3 = c_{33} + c_{88}, \\ e_4 = c_{44} + c_{66} + c_{99}, e_5 = c_{77}, e_6 = c_{10,10}, \\ c_{21}, c_{31}, c_{41}, c_{42} + c_{65}, c_{43} + c_{98}, \\ c_{75}, c_{76}, c_{10,8}, c_{10,9}$$

form a K -basis of A . The algebra A is QF-3 and its unique minimal faithful left A -module is $Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus Ae_3$ but A is not a QF-2 algebra. The totality of non-isomorphic indecomposable left A -modules is

$$Ae_i/N^2e_i, Ne_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

except projective or injective or simple modules, where N means the radical of A . It can easily be verified that A satisfies the conditions of Theorem 1.3. Hence A is a QF-1 algebra³⁾.

References

- [1] MORITA, K.: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A **6**, No. 150, 83—142 (1958). — [2] TACHIKAWA, H.: Note on QF-3 rings, forthcoming. — [3] THRALL, R. M.: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 173—183 (1948).

Dept. of Math., Tokyo University of Education, Tokyo (Japan)

(Eingegangen am 25. Februar 1958)

³⁾ This algebra A was constructed by THRALL [3] as an example of a QF-3 algebra which is not QF-2. (However, he has overlooked that A is QF-1.)

Angeordnete projektive Ebenen

Von
SIBYLLA CRAMPE

Einleitung

Die aus den Anordnungseigenschaften einer angeordneten projektiven Ebene für ihren Koordinatenbereich sich ergebenden Monotoniegesetze sind für den Fall, daß der Koordinatenbereich eine Cartesische Gruppe ist, schon in dem Buch „Projektive Ebenen“ von PICKERT [4] dargestellt. In der vorliegenden Arbeit wird untersucht, was für Monotoniegesetze für die Ternärkörper angeordneter projektiver Ebenen folgen, in denen keine Schließungssätze vorausgesetzt werden; mit Hilfe dieser Gesetze wird in § 6 der angeordnete Ternärkörper definiert und anschließend im Satz 6 gezeigt, daß man einen Ternärkörper einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ auf genau eine Weise durch die Anordnung von $\mathfrak{E}$ anordnen kann und daß sich umgekehrt die projektive Ebene auf genau eine Weise durch die Anordnung eines ihrer Ternärkörper anordnen läßt.

Im § 7 wird untersucht, wie sich die Monotoniegesetze eines Ternärkörpers vereinfachen, wenn gewisse Schließungssätze vorausgesetzt werden, und im § 8 werden vollständige angeordnete Ternärkörper betrachtet. Der § 9 bringt das Beispiel einer echten Cartesischen Gruppe, in der die Anordnungsgesetze der Addition und das linksseitige, nicht aber das rechtsseitige Monotoniegesetz der Multiplikation erfüllt sind.

Im letzten Teil der Arbeit wird der Zusammenhang zwischen angeordneten projektiven Ebenen und projektiven Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist, erläutert. Es wird untersucht, wieweit sich die Monotoniegesetze von Ternärkörpern angeordneter affiner Ebenen auf Ternärkörper affiner Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist, übertragen lassen. Abschließend wird gezeigt, durch was für Ordnungsfunktionen gerade die Anordnung einer affinen Ebene charakterisiert ist.

Herrn G. PICKERT möchte ich für seine vielen Anregungen und Hinweise danken.

§ 1. Definition der projektiven und affinen Ebene, der Perspektivität und Projektivität

Unter einer *Inzidenzstruktur* versteht man ein Tripel von zwei Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ und einer zwischen den Elementen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{G}$ folgendermaßen erklärten Relation $\mathbb{I}$:

Aus $x \bar{\mid} y$ folgt $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{G}$.

Aus $x_i \bar{\mid} y_k$ ($i, k = 1, 2$) folgt $x_1 = x_2$ oder $y_1 = y_2$.

Die Elemente von $\mathfrak{P}$ nennt man *Punkte*, die Elemente von $\mathfrak{G}$ *Geraden*, und $\bar{\mid}$ bezeichnet man als *Inzidenzrelation*. Für $x \bar{\mid} y$, $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{G}$, sagt man „ x inzident y “ oder „der Punkt x liegt auf der Geraden y “ oder „die Gerade y geht durch den Punkt x “.

Eine *projektive Ebene* ist eine Inzidenzstruktur mit den folgenden drei Eigenschaften:

- (1) Durch zwei verschiedene Punkte geht eine Gerade.
- (2) Zwei verschiedene Geraden besitzen einen gemeinsamen Punkt.
- (3) Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind.

Die Geraden werden im folgenden immer mit kleinen griechischen und die Punkte mit kleinen oder großen lateinischen Buchstaben bezeichnet; für den Schnittpunkt zweier Geraden α, β schreiben wir auch kurz $\alpha \cap \beta$ und für die Verbindungsgerade zweier Punkte A, B entsprechend $A \cup B$ oder AB .

Statt $\bar{\mid}$ wird in einer projektiven Ebene $\in$ geschrieben, da man dort eine Gerade ja auch durch die auf ihr liegende Punktreihe (d.i. die Menge der auf ihr liegenden Punkte) ersetzen kann.

Nimmt man aus einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ eine Gerade ω und sämtliche auf ihr liegenden Punkte heraus, so erhält man eine Unterstruktur $\mathfrak{E}_\omega$, in der noch (1) gilt, an Stelle von (2) aber

- (2') Durch einen nicht auf α liegenden Punkt A geht genau eine Gerade, welche mit α keinen Punkt gemeinsam hat.

Zwei Geraden, die keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben oder gleich sind, nennt man *parallel* zueinander und die in (2') gekennzeichnete Gerade die *Parallele* zu α durch A . Aus (3) erhält man für $\mathfrak{E}_\omega$

- (3') Es gibt drei nichtkollineare Punkte.

Eine Inzidenzstruktur mit den Eigenschaften (1), (2') und (3') heißt eine *affine Ebene*.

Die Gerade ω wird die *uneigentliche Gerade* und ihre Punkte werden die *uneigentlichen Punkte* der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ genannt.

Jede affine Ebene kann in eine projektive Ebene eingebettet werden; denn zu jeder affinen Ebene $\mathfrak{A}$ gibt es eine bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmte projektive Ebene $\mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{A}$ isomorph ist zu einer $\mathfrak{E}_\omega$ ([4], S. 14).

Wegen (3) gibt es in einer projektiven Ebene zwei verschiedene Geraden α, β und einen außerhalb dieser beiden Geraden liegenden Punkt S . Durch $x \rightarrow \xi = x \cup S$ ($x \in \alpha$) wird eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von α auf die Geraden durch den Punkt S definiert. Man nennt sie die *Perspektivität* der Punktreihe α auf das Strahlenbüschel S und ihre Umkehrung die *Perspektivität* des Strahlenbüschels S auf die Punktreihe α . Bildet man die Geraden des Büschels durch S weiterhin perspektiv auf die Punkte der

Geraden β ab, so erhält man eine umkehrbar eindeutige Abbildung von α auf β , welche die *Perspektivität* der Geraden α auf die Gerade β vom Zentrum S aus genannt wird. Eine Hintereinanderausführung von Perspektivitäten heißt *Projektivität*. In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ wird eine projektive Abbildung π der Geraden α auf die Gerade β mit $(\alpha \cap \omega)^\pi = \beta \cap \omega$ eine *affine Projektivität* genannt.

§ 2. Koordinateneinführung, Definition des Ternärkörpers

In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ wähle man zwei eigentliche voneinander verschiedene Punkte O, E und zwei voneinander verschiedene uneigentliche Punkte $U, V \notin OE$. Die Gerade OU sei als y - und die Gerade OU als x -Achse bezeichnet. Dann kann man jedem Punkt P aus $\mathfrak{E}_\omega$ durch

$$(*) \quad x_p = ((VP \cap OE) \cup U) \cap OV, \quad y = UP \cap OV$$

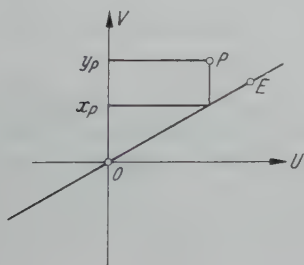


Fig. 1

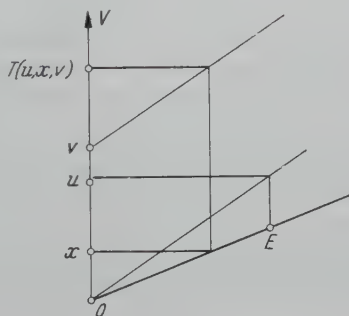


Fig. 2

zwei Punkte der Geraden OV eindeutig zuordnen. Umgekehrt entspricht jedem Paar (x_p, y_p) von Punkten x_p, y_p der Geraden OV auf Grund der Vorschrift $(*)$ genau ein Punkt von $\mathfrak{E}_\omega$. Man kann also jeden Punkt von $\mathfrak{E}_\omega$ als (x_p, y_p) darstellen, daher wird im folgenden für P häufig (x_p, y_p) geschrieben; x_p, y_p heißen die *Koordinaten* des Punktes P . Der Punkt O wird mit 0 und $UE \cap OE$ mit 1 bezeichnet, so daß O, E die Koordinatenpaare $(0, 0)$ bzw. $(1, 1)$ haben. Die Punktmenge der Geraden OV nennt man die *Koordinatenmenge* $\mathfrak{K}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ bezüglich der Punkte O, E, U, V .

Zwischen den Elementen von $\mathfrak{K}$ erklärt man eine *ternäre Verknüpfung* T durch die geometrische Vorschrift:

$T(u, x, v)$ ist die y -Koordinate des Schnittpunktes der Parallelen zu OV durch $Ux \cap OE$ mit der Parallelen zu $O \cup (Uu \cap EV)$ durch v .

Die geometrischen Eigenschaften der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ lassen sich nunmehr mit Hilfe der ternären Verknüpfung T als Eigenschaften der Koordinatenmenge $\mathfrak{K}$ ausdrücken:

- (1) Zu $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathfrak{K}$ gibt es im Falle $u_1 \neq u_2$ genau ein $x \in \mathfrak{K}$ mit $T(u_1, x, v_1) = T(u_2, x, v_2)$.
- (2) Zu $x, y, u \in \mathfrak{K}$ gibt es genau ein $v \in \mathfrak{K}$ mit $y = T(u, x, v)$.

- (3) Zu $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathfrak{K}$ gibt es im Falle $x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$ Elemente $u, v \in \mathfrak{K}$ mit $y_i = T(u, x_i, v), i = 1, 2$.
- (4) $v = T(0, x, v)$.
- (5) $v = T(u, 0, v)$.
- (6) $u = T(u, 1, 0)$.
- (7) $x = T(1, x, 0)$.

Eine mindestens zwei verschiedene Elemente 0, 1 enthaltende Menge $\mathfrak{K}$, für deren Elemente eine den Bedingungen (1) bis (7) genügende Verknüpfung T definiert ist, nennt man einen *Ternärkörper*.

Jeder affinen Ebene läßt sich bezüglich eines nichtausgearteten Punktequadrupels O, E, U, V eindeutig ein Ternärkörper zuordnen; und umgekehrt bestimmt auch jeder Ternärkörper bis auf Isomorphismen eindeutig eine affine Ebene, die bezüglich eines gewissen Punktequadrupels einen zu ihm isomorphen Ternärkörper als Koordinatenmenge besitzt ([4], S. 38).

Künftig wird mit $\mathfrak{K}$ immer der bezüglich des Punktequadrupels O, E, U, V gebildete Ternärkörper der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ bezeichnet.

Durch $T(1, x, y) = x + y$ und $T(x, y, 0) = xy$ führt man in dem Ternärkörper $\mathfrak{K}$ eine *Addition* und *Multiplikation* ein. Bezüglich der Addition ist die Menge $\mathfrak{K}$ eine Loop mit 0 als dem neutralen Element, bezüglich der Multiplikation ist die Menge $\mathfrak{K} - \{0\}$ eine Loop mit 1 als dem neutralen Element. Genau dann ist $T(u, x, v) = ux + v$ für alle u, x, v , wenn in der affinen Ebene der Desarguessche $(V, UV; U, OV)$ -Satz gilt.

§ 3. Definition der Anordnung, Zwischen- und Trennbeziehung¹⁾

Eine in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärte binäre Relation $<$ heißt *Anordnung* und $\mathfrak{M}$ dann *angeordnet*, wenn die folgenden drei Bedingungen für alle $a, b, c \in \mathfrak{M}$ erfüllt sind:

- (1) $a \neq b$, wenn $a < b$.
- (2) $a < c$, wenn $a < b$ und $b < c$.
- (3) Entweder $a < b$ oder $b < a$, wenn $a \neq b$.

In einer angeordneten Menge $\mathfrak{M}$ kann man für alle Elemente von $\mathfrak{M}$ eine ternäre Relation ζ durch

- (4) $\zeta(a, b, c)$ genau dann, wenn $a < b < c$ oder $c < b < a$

definieren. Man bezeichnet ζ als die zur Anordnung $<$ gehörige *Zwischenbeziehung*.

Umgekehrt kann man aus jeder in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärten Zwischenbeziehung auch eine Anordnung gewinnen, indem man für zwei Elemente — sie seien mit 0 und 1 bezeichnet — $0 < 1$ festsetzt und dann definiert:

$$x < 0 \text{ genau dann, wenn } \zeta(x, 0, 1);$$

¹⁾ Zu den Beweisen s. etwa [4], 9.1.

$x < y$ im Falle $x, y \neq 0$ genau dann, wenn $\zeta(0, x, y)$, $0 < x$ oder $\zeta(0, y, x)$, $y < 0$ oder $x < 0$, $0 < y$.

Zwischen ζ und $<$ besteht dann die Beziehung (4). Statt $<$ kann man natürlich auch die konverse Relation $>$ nehmen.

Erhält eine Abbildung φ die Relation ζ , so ist φ entweder monoton wachsend oder monoton fallend.

Beweis. Gilt $\zeta(a, b, c)$, so ist wegen (4) $a < b < c$ oder $c < b < a$. Ich kann also $a < b < c$ voraussetzen. Im Bildbereich gilt $\zeta(a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi)$, nach (4) also (I) $a^\varphi < b^\varphi < c^\varphi$, oder (II) $c^\varphi < b^\varphi < a^\varphi$. Für zwei beliebige Elemente x, y mit $x < y$, von denen mindestens eines von a, b verschieden sei, gibt es die folgenden Lagemöglichkeiten in bezug auf a, b :

- 1) $x < a$, $y \leq a < b$, d.h. $\zeta(x, a, b)$ und $\zeta(x, y, b)$;
- 2) $x < a$, $a < y$, d.h. $\zeta(x, a, b)$ und $\zeta(x, a, y)$;
- 3) $a \leq x$, $y < b$, d.h. $\zeta(a, y, b)$ und $\zeta(x, y, b)$;
- 4) $a \leq x$, $b < y$, d.h. $\zeta(a, b, y)$ und $\zeta(x, b, y)$;
- 5) $a < x$, $y = b$, d.h. $\zeta(a, x, y)$ und $y = b$.

Wegen Invarianz der Zwischenrelation ζ bei der Abbildung φ und bei Berücksichtigung von (4) folgt, daß für jede der fünf Möglichkeiten im Falle (I) stets $x^\varphi < y^\varphi$ und im Falle (II) stets $y^\varphi < x^\varphi$ gilt. Also ist φ im Falle (I) monoton wachsend und im Falle (II) monoton fallend.

Um das monotone Wachsen bzw. Fallen einer Abbildung φ nachzuweisen, genügt es deshalb, die Invarianz von ζ bei Ausübung von φ und ferner $a^\varphi < b^\varphi$ bzw. $b^\varphi < a^\varphi$ für zwei spezielle a, b mit $a < b$ zu zeigen.

Unter einer in einer Menge $\mathfrak{M}$ erklärten *Trennbeziehung* versteht man eine quaternäre Relation $|$ mit den folgenden Eigenschaften für alle $a, b, c, d, e \in \mathfrak{M}$:

- (1) a, b, c, d sind untereinander verschieden, wenn $ab|cd$.
- (2) $ba|cd$ und $cd|ab$, wenn $ab|cd$.
- (3) $ab|cd$ falsch, wenn $ac|bd$.
- (4) $ab|cd$ oder $ca|bd$ oder $bc|ad$, wenn a, b, c, d untereinander verschieden.
- (5) $cd|ea$, wenn $ab|cd$, $bc|de$
($ab|cd$ liest man „ ab trennt cd “).

Läßt man ein Element $u \in \mathfrak{M}$ fort, so kann man mittels der in $\mathfrak{M}$ definierten Trennbeziehung $|$ stets eine Zwischenrelation ζ für die Restmenge $\mathfrak{M} - \{u\}$ folgendermaßen erklären:

- (*) $\zeta(a, b, c)$ genau dann, wenn $ac|bu$.

Umgekehrt kann man aus einer Zwischenbeziehung in $\mathfrak{M} - \{u\}$ stets eine Trennbeziehung in $\mathfrak{M}$ durch folgende Festsetzung gewinnen:

$ab|cu$, $ba|cu$, $ab|uc$ und $ab|cu$ für $a, b, c \neq u$ genau dann, wenn $\zeta(a, c, b)$.
 $ab|cd$, $ba|cd$, $ab|dc$ und $ba|dc$ für $a, b, c, d \neq u$ genau dann, wenn

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta(a, c, b), d \neq a, b \text{ und nicht } \zeta(a, d, b) \\ \text{oder} \\ \zeta(a, d, b), c \neq a, b \text{ und nicht } \zeta(a, c, b). \end{array} \right.$$

Zur Abkürzung wird im folgenden statt $\zeta(P, Q, R)$ nur noch PQR geschrieben.

§ 4. Angeordnete projektive Ebene, angeordnete affine Ebene

Eine *projektive Ebene* heißt *angeordnet*, wenn jede ihrer Geraden mindestens vier Punkte enthält und in jeder Punktreihe (das ist die Menge der Punkte auf einer Geraden) eine Trennbeziehung erklärt ist, welche bei jeder perspektiven Abbildung einer Punktreihe auf eine andere erhalten bleibt.

Eine *affine Ebene* heißt *angeordnet*, wenn jede ihrer Geraden mindestens drei Punkte enthält und in jeder Punktreihe eine Zwischenbeziehung erklärt ist²⁾, welche bei jeder affinen projektiven Abbildung einer Punktreihe auf eine andere erhalten bleibt. Jede Anordnung einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ läßt sich zu einer Anordnung der zugehörigen projektiven Ebene fortsetzen ([4], S. 227), und aus jeder Anordnung einer projektiven Ebene $\mathfrak{E}$ kann man mittels (*) des § 3, wobei u stets gleich dem Schnittpunkt der jeweiligen Geraden mit ω zu setzen ist, eine Anordnung einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ herstellen.

In einer angeordneten affinen Ebene gilt offenbar:

- (1) $AB'C'$, wenn ABC , $AB' = AC' \neq AB$, $BB' \parallel CC'$ ³⁾,
- (2) $A'_1A'_2A'_3$, wenn $A_1A_2A_3$, $SA_i \parallel S'A'_i$ ($i=1, 2, 3$), $SS' \neq A_1A_2 = A'_1A'_2 \parallel SS'$,
- (3) $B'AC'$, wenn BAC , $AB' = AC' \neq AB$, $BB' \parallel CC'$.

Unter Voraussetzung der kennzeichnenden Eigenschaften der Zwischenbeziehung folgt die Bedingung (3) bereits aus (1) ([4], S. 228). Später wird dasselbe auch für (2) gezeigt.

Aus (1) und (3) läßt sich das *Axiom von PASCH* herleiten ([4], S. 228):

Geht die Gerade α durch keinen der nichtkollinearen Punkte A, B, C , und enthält sie einen Punkt C' mit $BC'A$, so enthält sie auch einen Punkt B' mit $AB'C$ oder einen Punkt A' mit $CA'B$.

Ist $\alpha \parallel AC$ oder $\alpha \parallel BC$, so handelt es sich offenbar um die Bedingung (1). Man nennt diese deshalb *das kleine Axiom von PASCH*.

Nach [4], S. 228, wird eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung zu einer angeordneten affinen Ebene, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält, und die obigen Bedingungen (1) und (2) gelten. In dem folgenden Satz 1 wird bewiesen, daß (2) aus (1) folgt. Damit ist dann also gezeigt, daß eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung bereits dann angeordnet wird, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und das kleine Axiom von PASCH gilt.

²⁾ Aus ABC folgt die Kollinearität der Punkte A, B, C .

³⁾ Hier wie im folgenden wird mit P' stets das projektive Bild von P bezeichnet.

Für den Satz 1 wollen wir noch den folgenden Hilfssatz beweisen.

HILFSSATZ 1. *Ist in jeder Punktreihe einer affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ eine Zwischenbeziehung erklärt, so daß (1) gilt, und liegen auf jeder Geraden mindestens drei Punkte, so gibt es in $\mathfrak{E}_\omega$ zu zwei beliebigen Punkten A, B mit $A \neq B$ stets einen Punkt C mit ACB .*

Beweis. In $\mathfrak{E}_\omega$ existiert wegen (3'), § 1, ein Punkt $P \notin AB$. Durch diesen ziehen wir die Parallele α zu AB . Auf α gibt es drei Punkte A_1, A_2, A_3 mit $A_1 A_2 A_3$. Es sei A'_2 der Schnittpunkt von $A_1 B$ mit der Parallelen zu $A_3 B$ durch A_2 und C der Schnittpunkt von AB mit der Parallelen zu $A_1 A$ durch A'_2 . Nach (1) folgt aus $A_1 A_2 A_3$ dann $A_1 A'_2 B$ und hieraus ACB .

SATZ 1. *Wenn in einer affinen Ebene in jeder Punktreihe mindestens drei Punkte liegen und eine Zwischenbeziehung so erklärt ist, daß (1) gilt, so ist auch (2) erfüllt.*

Beweis. Es wird gezeigt, daß aus $A_1 < A_2$ sogar $A'_1 < A'_2$ folgt, aus $A_1 < A_2 < A_3$ also $A'_1 < A'_2 < A'_3$ und somit aus $A_1 A_2 A_3$ auch $A'_1 A'_2 A'_3$.

Man setze $Q = SA_2 \cap S'A'_1$. Dieser Schnittpunkt Q existiert; denn wäre er nicht vorhanden, so wäre $S'A'_1 \parallel SA_2$ und $S'A'_1 \parallel SA_1$, nach (2'), § 1, somit $A_1 = A_2$ im Widerspruch zu $A_1 < A_2$. Wie vorhin erwähnt, folgt aus (1) die Bedingung (3).

Es werden nun die verschiedenen Lagemöglichkeiten des Bildpunktes A'_1 in bezug auf die Urbildpunkte A_1, A_2 betrachtet; hieraus wird mit Hilfe von (1) und (3) auf die Lage von Q und damit wiederum auf die Lage von A'_2 geschlossen.

I) $A_1 < A_2$ und $A_1 < A'_1$.

a) $A_1 < A'_1 < A_2$. Wegen $A_1 A'_1 A_2$ folgt nach (1) $SQ A_2$, hieraus nach (3) $S'Q A'_1$ und nach (1) somit $A'_2 A_2 A'_1$. Da $A'_1 < A_2$ ist, erhält man $A'_1 < A'_2$.

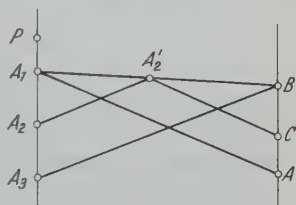


Fig. 3

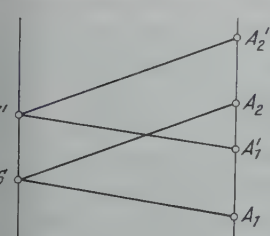


Fig. 4

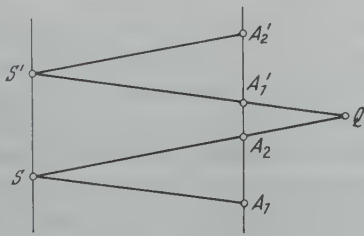


Fig. 5.

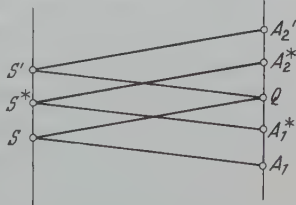


Fig. 6

b) $A_1 < A_2 < A'_1$. In diesem Fall gilt $A_1 A_2 A'_1$, daher nach (3) $SA_2 Q$ und nach (1) $S'A'_1 Q$, nach (3) also $A'_2 A'_1 A_2$. Wegen $A_2 < A'_1$ ist somit $A'_1 < A'_2$.

c) $A_2 = A'_1 = Q$. Nach Hilfssatz 1 gibt es zu $A_1 Q$ einen Punkt A'_1 mit $A_1 A'_1 Q$. Durch A'_1 ziehen wir die Parallele zu SA_1 , die SS' in S^* schneidet, und durch S^* die Parallele zu SQ , die mit $A_1 Q$ den Schnittpunkt A'_2 hat. Für die Punkte A_1, A_2, A'_1 trifft der Fall I) zu, und wir erhalten deshalb

$A_1^* < A_2^*$; also liegt auch bei den Punkten A_1^*, A_2^*, A_1' Fall I) vor, und es folgt somit $A_1' < A_2'$.

II) $A_1 < A_2$ und $A_1' < A_1$.

Austauschen von $<$ gegen $>$ zeigt, daß man mit (I) auch den Fall $A_1 < A_2, A_2' < A_2$ beherrscht [man schreibt $x < y$ genau dann, wenn $y < x$ ist], aus $A_1 < A_2, A_2' < A_2$ folgt also $A_2 < A_1, A_2 < A_2'$ und daher nach (I) $A_2' < A_1'$, d.h. $A_1' < A_2'$. Es bleibt also nur noch der Fall $A_1 < A_2, A_1' < A_1, A_2 < A_2'$, in dem trivialerweise $A_1' < A_2'$ folgt.

Aus dem Beweis dieses Satzes ergibt sich unmittelbar der

SATZ 2. Sind in einer angeordneten affinen Ebene die Bedingungen $SA_i \parallel S'A_i'$ ($i = 1, 2$), $SS' \neq A_1A_2 = A_1'A_2' \parallel SS'$ erfüllt, so folgt $A_1' < A_2'$ aus $A_1 < A_2$.

§ 5. Einfluß der Anordnung einer affinen Ebene auf ihren Ternärkörper

In diesem Paragraphen sollen die sich aus der Anordnung einer affinen Ebene ergebenden Eigenschaften für den zugehörigen Ternärkörper untersucht werden. Es wird sich zeigen, daß bezüglich der durch die Anordnung der affinen Ebene bewirkten Anordnung ihrer Koordinatenmenge die ternäre Verknüpfung T gewissen Monotoniegesetzen genügt. Falls T sich durch Addition und Multiplikation in der Form $T(u, x, v) = ux + v$ darstellen läßt, stimmen diese Monotoniegesetze mit den Monotoniegesetzen der Addition und Multiplikation überein.

HILFSSATZ 2. In dem Ternärkörper $\mathfrak{R}$ gelten die beiden folgenden Aussagen:

- (1) $T(u, x_1, v) T(u, x_2, v) T(u, x_3, v)$, falls $x_1 x_2 x_3$ und $u \neq 0$.
- (2) $T(u, x, v_1) T(u, x, v_2) T(u, x, v_3)$ für $v_1 v_2 v_3$.

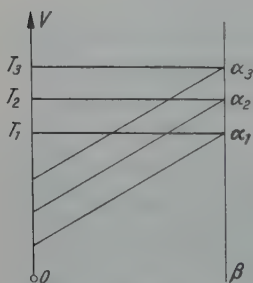


Fig. 7

Beweis. Zu (1): Zur Abkürzung werde $T_i = T(u, x_i, v)$ gesetzt und die durch $y = T(u, x, v)$ bestimmte Gerade mit α bezeichnet.

Wegen $U \notin OV, OE$ gibt es die Parallelprojektion von OV auf OE mit dem Zentrum U ; wegen $\alpha \not\parallel OV$ existiert ferner die Parallelprojektion von OE auf α mit dem Zentrum V , und weil $u \neq 0$ und daher $U \notin \alpha$ ist, kann man schließlich die Punktreihe α durch die Parallelprojektion vom Zentrum U aus wieder auf die Punktreihe OV abbilden. Bei einer Parallelprojektion bleibt

die Zwischenbeziehung erhalten. Weil T_i bei der Hintereinanderausführung der oben angegebenen Parallelprojektionen das Bild von x_i ist, folgt somit die Aussage (1).

Zu (2): Es werde $y_i = T(u, x, v_i)$ ($i = 1, 2, 3$) gesetzt, die durch $y = T(u, x, v)$ bestimmten Geraden werden mit α_i und die Gerade der Punkte mit der Abszisse x wird mit β bezeichnet.

Wegen $u \in \mathfrak{R}$ ist $\alpha_i \not\parallel OV, \alpha_i \not\parallel \beta$ ($i = 1, 2, 3$). Daher existiert die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$. Es sei σ_2 die Parallel-

projektion von β auf OV mit dem Zentrum U . Wegen Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen und $y_i = v_i^{\sigma_1 \sigma_2}$ ($i = 1, 2, 3$) erhält man somit die Aussage (2).

HILFSSATZ 3. *Gibt es ein $x_s \in \mathbb{R}$ mit*

$$T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) = T(u_3, x_s, v_3),$$

so gilt

$$T(u_1, x, v_1) T(u_2, x, v_2) T(u_3, x, v_3) \quad \text{für } u_1 u_2 u_3, x \neq x_s.$$

Beweis. Es werde $S = (x_s, T(u_1, x_s, v_1))$, $y_i = T(u_i, x, v_i)$ ($i = 1, 2, 3$) und β gleich der Geraden der Punkte mit der Abszisse x gesetzt.

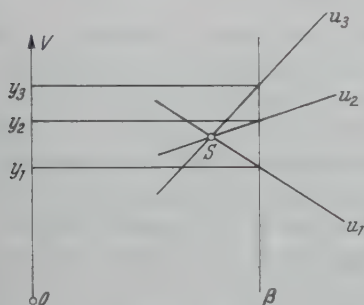


Fig. 8

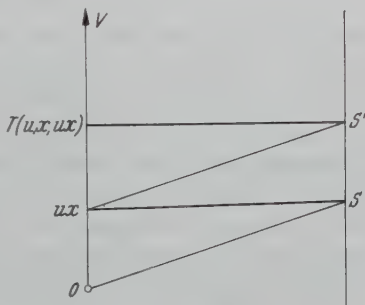


Fig. 9

Wegen $U \notin OV$, EV gibt es die Perspektivität σ_1 von OV auf EV mit dem Zentrum U ; da $O \notin EV$, UV , kann man die Punktreihe EV in der projektiven Ebene $\mathbb{E}$ durch σ_2 ferner perspektiv vom Zentrum O aus auf UV abbilden. Wegen $x \neq x_s$ und $S = (x_s, T(u_1, x_s, v_1))$ ist $S \notin \beta$, $S \notin UV$; daher existiert die Perspektivität σ_3 von UV auf β mit dem Zentrum S . Wegen $\beta \parallel OV$ ist $U \notin \beta$, also gibt es die Perspektivität σ_4 von β auf OV mit dem Zentrum U . Setzt man $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$, so ist σ eine projektive Abbildung in unserer Ebene $\mathbb{E}$, und wegen $V^\sigma = V$ ist σ sogar eine affine Projektivität in $\mathbb{E}_\omega$. Da bei einer affinen Projektivität die Zwischenbeziehung erhalten bleibt, gilt somit $u_1^\sigma u_2^\sigma u_3^\sigma$, und wegen $y_i = u_i^\sigma$ ($i = 1, 2, 3$) besagt dies gerade $y_1 y_2 y_3$.

Es folgen nunmehr einige Sätze, die über das monotone Wachsen bzw. Fallen der ternären Verknüpfung T bezüglich eines oder mehrerer ihrer Argumente Auskunft geben. Hierzu muß zunächst einmal aus der in $\mathbb{R}$ erklärten Zwischenrelation eine Anordnung für die Elemente von $\mathbb{R}$ gewonnen werden; nach § 3 ist diese eindeutig durch die Festsetzung $0 < 1$ bestimmt.

SATZ 3. $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$, wenn $v_1 < v_2$.

Beweis. Nach Satz 3 (2) ist die durch $v^x = T(u, x, v)$ erklärte Abbildung φ monoton. Um das monotone Wachsen von φ zu zeigen, genügt es daher, wie in § 3 nachgewiesen wurde, $T(u, x, v'_1) < T(u, x, v'_2)$ für zwei spezielle v'_1, v'_2 mit $v'_1 < v'_2$ zu beweisen.

Im Falle $ux = 0$ ist $x = 0$ oder $u = 0$, also stets $T(u, x, v_i) = v_i$ und φ trivialerweise monoton wachsend. Man kann daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit $ux \neq 0$ voraussetzen.

Man setze $A_1=0$, $A_2=A'_1=ux$, $A'_2=T(u, x, ux)$, $S=(x, T(u, x, 0))$ und $S'=(x, T(u, x, ux))$. Dann ist $SA_i || S'A'_i$ ($i=1, 2$) und $SS' \neq A_1A_2 = A'_1A'_2 || SS'$; die Voraussetzungen des Satzes 2 sind also erfüllt, und daher folgt $T(u, x, 0) < T(u, x, ux)$ für $0 < ux$ und $T(u, x, ux) < T(u, x, 0)$ für $ux < 0$, d.h. φ ist monoton wachsend.

SATZ 4. Ist $u_1 < u_2$, so gilt

$$T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) \quad \text{für } x_s < x,$$

$$T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) \quad \text{für } x_s > x,$$

wobei x_s durch $T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$ bestimmt ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 3 ist die für ein beliebiges Element y_s durch $u^\varphi = T(u, x, v)$, $T(u, x_s, v) = y_s$ erklärte Abbildung φ monoton. Nach Satz 3 ist die Abbildung $v \rightarrow x + v$ monoton wachsend; also ist $0 + v = v + 0 < v + v$ für $0 < v$ und $0 + v > v + v$ für $0 > v$. Da die Abbildung $x \rightarrow x + v$ nach Hilfssatz 2 monoton ist, ist sie somit monoton wachsend. Daher ist $T(0, x, y_s) = y_s = T(1, x_s, v') < T(1, x, v')$ für $x_s < x$ und $T(0, x, y_s) > T(1, x, v')$ für $x_s > x$. Also ist φ für $x > x_s$ monoton wachsend und für $x < x_s$ monoton fallend.

ANMERKUNG 1. Wegen $T(u_1, 0, v) = T(u_2, 0, v)$ ist

$$T(u_1, x, v) < T(u_2, x, v) \quad \text{für } 0 < x, u_1 < u_2,$$

$$T(u_1, x, v) > T(u_2, x, v) \quad \text{für } 0 > x, u_1 < u_2.$$

Setzt man in Satz 4 $u_1=0$, $u_2=u$, so folgt $T(u, x_s, v) = v_1 = T(0, x, v_1) < T(u, x, v)$ für $x_s < x$, $0 < u$ und $T(u, x_s, v) > T(u, x, v)$ für $x_s > x$, $0 < u$; entsprechend erhält man für $u_1=u$ und $u_2=0$, daß $T(u, x, v) < T(u, x_s, v)$ für $x_s < x$, $0 > u$ und $T(u, x, v) > T(u, x_s, v)$ für $x_s > x$, $0 > u$ ist. Da dies für jedes beliebige $x_s \in \mathfrak{R}$ gilt, ist die Abbildung $x \rightarrow T(u, x, v)$ für $0 < u$ monoton wachsend und für $0 > u$ monoton fallend.

§ 6. Angeordnete Ternärkörper

In diesem Paragraphen wird die Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{R}$ auf Grund der eben hergeleiteten Monotonieigenschaften der ternären Relation T definiert und anschließend gezeigt, daß $\mathfrak{R}$ genau dann angeordnet ist, wenn die zugehörige affine Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ es ist.

DEFINITION 1. Ein Ternärkörper $\mathfrak{R}$ heißt *angeordnet*, wenn für seine Elemente eine Anordnung $<$ definiert ist, welche die folgenden beiden Bedingungen erfüllt:

$$(1) \quad T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2) \quad \text{für } v_1 < v_2,$$

$$(2) \quad T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) \quad \text{für } u_1 < u_2, x > x_s,$$

$$T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) \quad \text{für } u_1 < u_2, x < x_s,$$

wobei x_s durch $T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$ bestimmt ist.

ANMERKUNG 2. Nach Definition 1 (1) ist die Abbildung $v \rightarrow T(1, 1, v) = 1 + v$ monoton wachsend; also ist diese Abbildung nicht die identische, und es folgt somit aus der Existenz zweier verschiedener Elemente (und diese gibt es, nämlich 0 und 1) eines angeordneten Ternärkörpers $\mathfrak{R}$, daß $\mathfrak{R}$ unendlich viele voneinander verschiedene Elemente enthält. Wie in Anmerkung 1 erwähnt, folgen aus (2) die Aussagen

$$(2a) \quad \begin{aligned} T(u, x_1, v) &< T(u, x_2, v) && \text{für } x_1 < x_2, 0 < u, \\ T(u, x_1, v) &> T(u, x_2, v) && \text{für } x_1 < x_2, 0 > u \end{aligned}$$

und

$$(2b) \quad \begin{aligned} T(u_1, x, v) &< T(u_2, x, v) && \text{für } u_1 < u_2, 0 < x, \\ T(u_1, x, v) &> T(u_2, x, v) && \text{für } u_1 < u_2, 0 > x. \end{aligned}$$

Mit $u=1, x=c, v_1=a, v_2=b$ folgt aus (1) das rechtsseitige Monotoniegesetz der Addition, d.h. $c+a < c+b$ für $a < b$. Setzt man in (2a) $u=1, x_1=a, x_2=b, v=c$, so erhält man das linksseitige Monotoniegesetz der Addition: $a+c < b+c$ für $a < b$. Mit $u=c, x_1=a, x_2=b, v=0$ ergibt sich aus (2a) das rechtsseitige (d.h. $ca < cb$ für $a < b, c > 0, ca > cb$ für $a < b, c < 0$) und mit $u_1=a, u_2=b, x=c, v=0$ aus (2b) das linksseitige Monotoniegesetz der Multiplikation (d.h. $ac < bc$ für $a < b, c > 0, ac > bc$ für $a < b, c < 0$).

Aus der Gültigkeit von (1) bzw. (2) folgt natürlich auch die Gültigkeit der Umkehrung von (1) [d.h. $v_1 < v_2$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$] bzw. der Umkehrung von (2)

$$\left[\begin{aligned} \text{d.h.} \quad & \left\{ \begin{array}{ll} u_1 < u_2, x > x_s & \text{oder} \quad u_1 > u_2, x < x_s \\ u_1 < u_2, x < x_s & \text{oder} \quad u_1 > u_2, x > x_s \end{array} \right. \\ \text{für} & \quad T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) \Big\}, \quad T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2); \\ \text{für} & \quad T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) \Big\} \end{aligned} \right]$$

denn wäre $v_1 \geq v_2$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$, so erhielte man wegen $v_1 \geq v_2$ nach (1) die unsinnige Aussage $T(u, x, v_1) \geq T(u, x, v_2)$ für $T(u, x, v_1) < T(u, x, v_2)$; und aus der Annahme, $u_1 \geq u_2, x \leq x_s$ oder $u_1 \leq u_2, x \geq x_s$ für $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und $u_1 \leq u_2, x \leq x_s$ oder $u_1 \geq u_2, x \geq x_s$ für $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$, folgte nach (2), daß $T(u_1, x, v_1) \geq T(u_2, x, v_2)$ für $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und $T(u_1, x, v_1) \leq T(u_2, x, v_2)$ für $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ gälte.

SATZ 5. Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei angeordnet. Erklärt man durch (α) und (β) eine Zwischenbeziehung auf den Geraden von $\mathfrak{E}_\omega$, so wird $\mathfrak{E}_\omega$ zu einer angeordneten affinen Ebene.

(α) $(a, y_1) (a, y_2) (a, y_3)$ genau dann, wenn $y_1 y_2 y_3$.

(β) $(x_1, y_1) (x_2, y_2) (x_3, y_3)$ mit $y_i = T(u, x_i, v)$ ($i=1, 2, 3$) genau dann, wenn $x_1 x_2 x_3$.

Beweis. Wie mit dem Satz 1 bewiesen wurde, wird eine affine Ebene durch eine in jeder ihrer Punktreihen erklärte Zwischenbeziehung angeordnet, wenn jede Gerade mindestens drei Punkte enthält und das kleine Axiom von PASCH erfüllt ist. Da $\mathfrak{K}$ sogar unendlich viele Elemente enthält, liegen wegen (α) und (β) auch unendlich viele Punkte auf jeder Geraden.

Es wird nun die Invarianz der für jede Punktreihe erklärten Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen nachgewiesen. Da das kleine Axiom von PASCH aus der Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen folgt, ist damit dann die Gültigkeit des kleinen Axioms von PASCH in der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ gezeigt.

Wir beweisen zunächst den folgenden

HILFSSATZ 4. *Existieren $\bar{u}, \bar{v} \in \mathfrak{K}$ mit $T(u, x_i, v_i) = T(\bar{u}, x_i, \bar{v})$ ($i = 1, 2, 3$), so gilt $x_1 x_2 x_3$ für $v_1 v_2 v_3$.*

Beweis. Nach (4), § 3, kann $v_1 < v_2 < v_3$ angenommen werden. Für $v_1 < v_2$ ist nach Definition 1 (1) $T(u, x_1, v_1) < T(u, x_1, v_2)$, wegen $T(\bar{u}, x_1, \bar{v}) = T(u, x_1, v_1)$ ist also (*) $T(\bar{u}, x_1, \bar{v}) < T(u, x_1, v_2)$; ferner ist $T(\bar{u}, x_2, \bar{v}) = T(u, x_2, v_2)$ und wegen $\bar{u} \in \mathfrak{K}$ auch $x_1 \neq x_2$. Nach der Umkehrung von Aussage (2) aus Definition 1 folgt daher aus (*), daß entweder $\bar{u} < u, x_1 > x_2$ oder $\bar{u} > u, x_1 < x_2$ gilt.

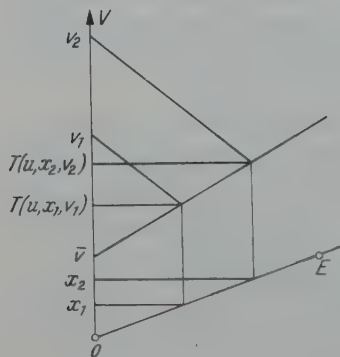


Fig. 10

Ersetzt man in der eben gemachten Überlegung die Indizes 1, 2 durch 2, 3, so erhält man wegen $v_2 < v_3$ die beiden Möglichkeiten $\bar{u} < u, x_2 > x_3$ und $\bar{u} > u, x_2 < x_3$. Also gilt im Falle $\bar{u} > u$ wie im Falle $\bar{u} < u$ stets $x_1 x_2 x_3$.

Wir kehren zu unserem Beweis der Invarianz der Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen zurück.

Die Urbildgerade bezeichnen wir mit α , ihre Punkte mit $P_i = (x_i, y_i)$, die Bildgerade mit α' und den Bildpunkt von P_i auf α' mit $P'_i = (x'_i, y'_i)$.

Ist V das Zentrum der Parallelprojektion, so kann weder α noch α' durch V gehen. Daher ist die Zwischenbeziehung auf α wie auf α' durch (β) erklärt. Aus $P_1 P_2 P_3$ folgt somit $x_1 x_2 x_3$, und hieraus erhält man wegen $P_i P'_i \parallel OV$, also $x'_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3$), dann $P'_1 P'_2 P'_3$.

Sei σ eine Parallelprojektion mit einem von V verschiedenen Zentrum Z . Mit τ_1 als der Parallelprojektion mit dem Zentrum Z von α auf OV und τ_2 als der Parallelprojektion mit dem Zentrum Z von OV auf α' (falls α bzw. α' gleich OV ist, sei τ_1 bzw. τ_2 gleich der Identität) ist $\sigma = \tau_1 \tau_2$. Bleibt die Zwischenbeziehung bei Ausübung von τ_1^{-1}, τ_2 invariant, so auch bei τ_1, τ_2 und somit auch bei σ . Daher genügt es, die Invarianz der Zwischenbeziehung bei einer Parallelprojektion von OV auf α' nachzuweisen.

λ sei die Parallele zu $P_i P'_i$ durch 0. Man setze $v_i = P_i$ ($i = 1, 2, 3$) und $u = ((\lambda \cap EV) \cup U) \cap OV$. Aus $v_1 v_2 v_3$ folgt nach Definition 1 (1)

$$T(u, x', v_1) T(u, x', v_2) T(u, x', v_3), \quad \text{d.h.} \quad P'_1 P'_2 P'_3 \text{ für } V \in \alpha'.$$

Ist $V \notin \alpha'$, so setze man $\bar{u} = ((\mu \cap EV) \cup U) \cap OV$, wobei μ die Parallele zu α' durch 0 ist, und $\bar{v} = x' \cap OV$. Dann gilt nach dem eben bewiesenen Hilfssatz 4 $x'_1 x'_2 x'_3$, und dies besagt wegen (β) gerade wieder $P'_1 P'_2 P'_3$.

Aus jeder Anordnung der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ ergeben sich mittels der auf ihrer Punktreihe OI' erklärten Zwischenbeziehung zwei Anordnungen ihrer Koordinatenmenge $\mathfrak{K}$. In dem einen Fall ist $0 < 1$, dann erhält man, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, eine Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{K}$. Im andern Fall ist $1 < 0$, daraus folgt aber z.B. $T(1, 1, 0) < T(1, 0, 0)$ für $u = 1 < 0$ und $x_1 = 1 < 0 = x_2$, d.h. die Bedingung (1) der Definition 1 ist nicht erfüllt. Die Anordnung mit $1 < 0$ macht $\mathfrak{K}$ also nicht zu einem angeordneten Ternärkörper. Aus jeder Anordnung des Ternärkörpers $\mathfrak{K}$ kann aber, wie in Satz 5 gezeigt wurde, eine Anordnung der zugehörigen affinen Ebene gewonnen werden. Zusammenfassend erhält man also den

SATZ 6. *Den Ternärkörper $\mathfrak{K}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ kann man auf genau eine Weise durch die Anordnung von $\mathfrak{E}_\omega$ anordnen, und umgekehrt läßt sich $\mathfrak{E}_\omega$ auf genau eine Weise durch eine Anordnung von $\mathfrak{K}$ anordnen.*

§ 7. Ternärkörper angeordneter affiner Ebenen, in denen gewisse Schließungssätze erfüllt sind

In diesem Paragraphen soll untersucht werden, wie sich die Monotoniegesetze für die ternäre Verknüpfung vereinfachen, wenn spezielle Desarguessche Sätze vorausgesetzt werden.

Als *affinen kleinen Satz von DESARGUES* bezeichnet man in der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ den folgenden Schließungssatz:

Aus $C, A_i, B_i \in \gamma_i$ ($i = 1, 2, 3$), $C \in \omega$, $C_{ik}, A_i, A_k \in \alpha_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3; i < k$), $C_{ik}, B_i, B_k \in \beta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, 3; i < k$), $C \neq A_i \neq B_i \neq C, \gamma_1 \neq \gamma_2 \neq \gamma_3 \neq \gamma_1, \alpha_{12} \neq \alpha_{13}, \beta_{12} \neq \beta_{13}$ und $C_{12}, C_{13} \in \omega$ folgt $C_{23} \in \omega$.

Hierbei sind ω und C Festelemente und alle anderen in dem Schließungssatz auftretenden Punkte und Geraden Variable. Unter einem Paar zusammengehöriger Variabler versteht man die Paare A_1, β_{23} und C_{12}, γ_3 und jedes durch Permutation der Indizes oder Vertauschen der Buchstaben A, β mit B, α hieraus hervorgehende. Macht man ein Paar zusammengehöriger Variabler, es sei mit C' und γ' bezeichnet^{3a)}, weiterhin zu Festelementen, so erhält man den *Desarguesschen* $(C, \omega; C', \gamma')$ -Satz. (Näheres hierüber findet man in [4].)

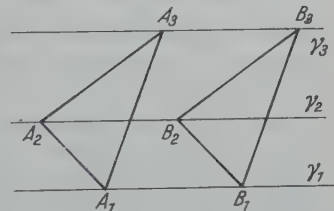


Fig. 11

^{3a)} Aber C' natürlich nicht die Variable C_{23} .

U, V, O, E sollen wieder die gleiche Bedeutung wie in § 2 haben. Der Desarguessche $(V, UV; U, OV)$ -Satz ist gleichwertig mit der *ersten Zerlegbarkeitsbedingung*, die folgendes besagt: Für alle $u, x, v \in \mathfrak{K}$ gilt $T(u, x, v) = ux + v$.

Unter der *zweiten Zerlegbarkeitsbedingung* versteht man die Aussage:

Für alle $u, x, w \in \mathfrak{K}$ ist $T(u, x, uw) = u(x + w)$. Diese Bedingung ist gleichwertig mit dem Desarguesschen $(U, UV; V, OU)$ -Satz.

SATZ 7. Ist die erste oder die zweite Zerlegbarkeitsbedingung erfüllt, so läßt sich die erste Bedingung der Definition 1 durch $(\alpha) \quad c + a < c + b$ für $a < b$ ersetzen.

Beweis. In Anmerkung 2 wurde gezeigt, daß (α) aus Definition 1 (1) folgt. Bei Voraussetzung der ersten Zerlegbarkeitsbedingung erhält man mit $c = ux$, $a = v_1$, $b = v_2$ aus (α) die Aussage (1) von Definition 1. Ist die zweite Zerlegbarkeitsbedingung erfüllt, so bestimme man w_1, w_2 durch $uw_i = v_i$, $i = 1, 2$.

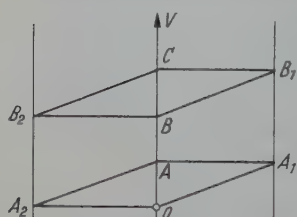


Fig. 12

Wie in Anmerkung 2 erwähnt, folgen aus Definition 1 (2) die Monotoniegesetze der Multiplikation. Daher gilt $w_1 < w_2$ für $v_1 < v_2$, $u > 0$ und $w_1 > w_2$ für $v_1 < v_2$, $u < 0$. Da $T(u, x, v_i) = T(u, x, uw_i) = u(x + w_i)$ ($i = 1, 2$) ist, erhält man somit wegen (α) und des rechtsseitigen Monotoniegesetzes der Multiplikation wieder Definition 1 (1).

Unter der *Bolschen V-Bedingung* für O im (U, V, W) -Gewebe versteht man den Schließungssatz:

Aus $A_2V = B_2V$, $OV = AV = BV = CV$, $A_1V = B_1V$; $OW = A_1W$, $BW = B_1W$, $B_2W = CW$, $A_2W = AW$; $AU = A_1U$, $CU = B_1U$, $A_2U = OU$ folgt $B_2U = BU$.

Diese Bedingung ist gleichwertig mit der Aussage (s. [4], S. 54):

(*) Für alle $x, y \in \mathfrak{K}$ gilt $x' + (x + y) = y$ für $x' + x = 0^{3b}$.

SATZ 8. Gilt in der affinen Ebene $\mathfrak{G}_\omega$ außer dem Desarguesschen $(V, UV; U, OV)$ -Satz noch die Bolsche V-Bedingung für O im (U, V, W) -Gewebe, so ist Definition 1 gleichwertig mit (α) des Satzes 7 und der folgenden Bedingung

(β) $ac + (-ad + e) < bc + (-bd + e)$ für $a < b$, $c > d$,
 $ac + (-ad + e) > bc + (-bd + e)$ für $a < b$, $c < d$.

Beweis. Es sei $u_1x_s + v_1 = u_2x_s + v_2 = y_s$. Wegen (*) ist dann $-u_1x_s + (u_1x_s + v_1) = v_1 = -u_1x_s + y_s$ und entsprechend $-u_2x_s + y_s = v_2$. Hiermit wird Definition 1 (2) zu

(**) $u_1x + (-u_1x_s + y_s) < u_2x + (-u_2x_s + y_s)$ für $u_1 < u_2$, $x > x_s$,
 $u_1x + (-u_1x_s + y_s) > u_2x + (-u_2x_s + y_s)$ für $u_1 < u_2$, $x < x_s$.

^{3b)} Im Folgenden wird das durch $x' + x = 0$ bestimmte Element x' mit $-x$ bezeichnet und $(-x) + y = -x + y$, $y + (-x) = y - x$ gesetzt.

Mit $u_1 = a$, $u_2 = b$, $x = c$, $x_s = d$ [x_s kann in Definition 1 (2) beliebig vorgegeben werden] und $y_s = e$ (**) aber gerade die Bedingung (β) . Also ist (β) mit Definition 1 (2) gleichwertig, und daher folgt unsere Behauptung nach Satz 7.

Wählt man $e = 0$, so folgt aus (β)

$$\begin{aligned} (\beta') \quad ac - ad &< bc - bd && \text{für } a < b, c > d, \\ ac - ad &> bc - bd && \text{für } a < b, c < d. \end{aligned}$$

ANMERKUNG 3. Ist $\mathfrak{K}$ eine Cartesische Gruppe, d.h. gilt der Desarguessche (V, UV) -Satz, so ist die Definition 1 gleichwertig mit (α) von Satz 7 und den folgenden Bedingungen⁴⁾

$$\begin{aligned} (\alpha') \quad a + c &< b + c && \text{für } a < b, \\ (\gamma) \quad ac - ad &< bc - bd && \text{für } a < b, c > d. \end{aligned}$$

Beweis. Aus (β') von Satz 8 erkennt man, daß (γ) aus Definition 1 (2) folgt. Es ist also nur noch zu zeigen, daß man auch (1) und (2) von Definition 1 aus (α) , (α') und (γ) erhält. Nach (γ) ist $ad - ac < bd - bc$ für $a < b$, $d > c$. Wegen der Assoziativität der Addition folgt hieraus mit (α) und (α') $ad < bd - bc + ac$, $0 < bd - bc + ac - ad$, $-bd < -bc + ac - ad$ und schließlich $bc - bd < ac - ad$, d.h. $ac - ad > bc - bd$ für $a < b$, $c > d$. Also gilt bei Voraussetzung von (α) , (α') , (γ) auch (β') , und auf Grund der Assoziativität der Addition ergibt sich hieraus (β) . Nach Satz 8 folgen aus (α) und (β) die Bedingungen (1) und (2) von Definition 1.

ANMERKUNG 4⁵⁾.

I) Ist $\mathfrak{K}$ ein Rechtsquasikörper, d.h. $\mathfrak{G}_\omega(UV, UV)$ -transitiv, so lassen sich die Bedingungen der Definition 1 durch (α) von Satz 7 und (α') $a + c < b + c$ für $a < b$, (δ') $ac < bc$ für $a < b$, $c > 0$; $ac > bc$ für $a < b$, $c < 0$ ersetzen.

II) Ist $\mathfrak{K}$ ein Linksquasikörper, d.h. $\mathfrak{G}_\omega(V, V)$ -transitiv, so sind die Bedingungen der Definition 1 gleichwertig mit (α) von Satz 7, (α') und (δ) $ca < cb$ für $a < b$, $c > 0$; $ca > cb$ für $a < b$, $c < 0$.

Beweis. Da ein Rechts- bzw. Linksquasikörper eine Cartesische Gruppe ist, folgen (α) , (α') , (δ') und (δ) aus (1) und (2) von Definition 1. Wegen Anmerkung 3 ist also nur noch zu zeigen, daß (γ) im Falle I) aus (α) , (α') und (δ') und im Falle II) aus (α) , (α') und (δ) folgt. Bei Voraussetzung der Rechtsdistributivität ist $ac - ad = a(c - d)$, $bc - bd = b(c - d)$, nach (α') ist $c - d > 0$ für $c > d$ und nach (δ') somit $ac - ad < bc - bd$ für $a < b$, $c > d$. Ist in $\mathfrak{K}$ das linksdistributive Gesetz erfüllt, so ist wegen (α) und (δ) $(-b + a)c < (-b + a)d$ für $a < b$, $c > d$, d.h. $-bc + ac < -bd + ad$. Auf Grund der Assoziativität der Addition folgt hieraus nach (α) und (α') $ac = bc - bd + ac < bc - bd + ad$, $ac - ad < bc - bd + ad - ad = bc - bd$, d.h. ebenfalls (γ) .

⁴⁾ Siehe auch [4], S. 236, Satz 14 und 15.

⁵⁾ Siehe auch [4], S. 237.

§ 8. Vollständige Ternärkörper

DEFINITION 2. Ein *Ternärkörper* $\mathfrak{R}$ heißt bezüglich der in ihm erklärten Anordnung *vollständig*⁶⁾, wenn eine nach oben beschränkte nichtleere Menge stets auch eine obere Grenze hat. Eine linear angeordnete *Punktreihe* wird *vollständig* genannt, wenn jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge dieser Punktreihe eine obere Grenze hat.

Eine angeordnete *affine Ebene* heißt *vollständig*, wenn es in ihr eine vollständige angeordnete Punktreihe gibt.

ANMERKUNG. In einem vollständigen angeordneten Ternärkörper hat auch jede nach unten beschränkte nichtleere Menge eine untere Grenze. Zum Beweise betrachte man die durch $a^q + a = 0$ erklärte Abbildung q . Diese, wie auch die zu q inverse Abbildung q^{-1} , kehrt die Anordnung um; denn gäbe es zwei Elemente b, c , für die zugleich $b < c$ und $-b < -c$ gälte, so wäre nach den Monotoniegesetzen der Addition $-b + b = 0 < -c + b < -c + c = 0$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Durch q kann man also jede nach unten beschränkte nichtleere Menge $\mathfrak{U}$ auf eine nach oben beschränkte nichtleere Menge $\mathfrak{U}^q = \{u^q; u \in \mathfrak{U}\}$ abbilden. Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ existiert die obere Grenze g von $\mathfrak{U}^q$. Dann ist $g^{q^{-1}}$ die untere Grenze von $\mathfrak{U}$, denn wegen $u^q \leq g$ für alle $u^q \in \mathfrak{U}^q$ gilt einmal $u \geq g^{q^{-1}}$ für alle $u \in \mathfrak{U}$, und $g^{q^{-1}}$ ist somit eine untere Schranke von $\mathfrak{U}$; gäbe es nun ein x mit $u \geq x > g^{q^{-1}}$ für alle $u \in \mathfrak{U}$, so wäre $u^q \leq x^q < g$ für alle $u^q \in \mathfrak{U}^q$ und g folglich nicht die obere Grenze von $\mathfrak{U}^q$; es kann also kein solches x geben, und $g^{q^{-1}}$ ist daher die untere Grenze von $\mathfrak{U}$.

SATZ 9. Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ sei bezüglich seiner Anordnung vollständig. Dann folgt die Bedingung (2) von Definition 1 aus Definition 1(1) und den folgenden beiden Bedingungen:

$$(2a) \quad T(u, x_1, v) < T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2, u > 0,$$

$$T(u, x_1, v) > T(u, x_2, v) \quad \text{für } x_1 < x_2, u < 0,$$

$$(2b) \quad T(u_1, x, v) < T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2, x > 0,$$

$$T(u_1, x, v) > T(u_2, x, v) \quad \text{für } u_1 < u_2, x < 0.$$

Beweis. Ist $u_1 = 0 < u_2$, so folgt nach (2a) wegen $T(u_1, x, v) = T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$, daß $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ für $x > x_s$ und $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ für $x < x_s$ ist. Für $u_2 = 0$ erhält man wegen $T(u_2, x, v_2) = T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ ebenfalls Definition 1 (2). Im Falle $u_1 < 0 < u_2$ ist nach (2a) $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) < T(u_2, x, v_2)$ für $x > x_s$ und $T(u_1, x, v_1) > T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2) > T(u_2, x, v_2)$ für $x < x_s$, d.h. es gilt auch hier die Bedingung (2).

Man kann daher für den weiteren Beweis ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $0 < u_1 < u_2$ oder $u_1 < u_2 < 0$ sei. Der Nachweis der Gültigkeit von Definition 1 (2) in diesen beiden Fällen verläuft folgendermaßen:

⁶⁾ Die Bezeichnung ist der Verbandstheorie (nicht der Topologie) entnommen und müßte eigentlich „bedingt vollständig“ heißen.

Im Teil I) wird bewiesen^{6a)}, daß $v_1 < v_2$ für $0 > x_s$ und $v_1 > v_2$ für $0 < x_s$ ist. In II) wird aus der Existenz von $a, a' \in \mathfrak{K}$ mit $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ auf Grund der Vollständigkeit von $\mathfrak{K}$ die Existenz eines $\bar{a} \in \mathfrak{K}$ mit $T(u_1, \bar{a}, v_1) = T(u_2, \bar{a}, v_2)$ und $a\bar{a}a'$ gefolgert. Da es zu $u_1 \neq u_2$ aber genau ein x_s mit $T(u_1, x_s, v_1) = T(u_2, x_s, v_2)$ gibt, muß daher für alle $x > x_s$ stets $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ oder stets $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ und für alle $x < x_s$ stets $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ oder stets $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ sein. In III) schließlich wird die Unmöglichkeit von $T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2)$ für alle $x \neq x_s$ bzw. $T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2)$ für alle $x \neq x_s$ nachgewiesen.

Aus II) und III) folgt, daß entweder

$$(*) \quad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) & \text{für } x > x_s \\ T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) & \text{für } x < x_s \end{cases}$$

oder

$$(**) \quad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2) & \text{für } x > x_s \\ T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2) & \text{für } x < x_s \end{cases}$$

sein muß.

Wegen I) und $T(u_i, 0, v_i) = v_i$ ist aber der Fall (**) unmöglich, d.h. es gilt (*) und somit die Bedingung (2) von Definition 1.

I) Man ziehe durch v_2 die Parallele zu der durch $y = T(u_1, x, v_1)$ bestimmten Geraden. Wegen (2b) ist $T(u_1, x_s, v_2) < T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ für $x_s > 0$ und $T(u_1, x_s, v_2) > T(u_2, x_s, v_2) = T(u_1, x_s, v_1)$ für $x_s < 0$. Nach Definition 1 (1) erhält man hieraus $v_2 < v_1$ für $x_s > 0$ und $v_2 > v_1$ für $x_s < 0$.

II) Es sei $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$ und $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$. Es gibt die folgenden Möglichkeiten:

- a) $0 < u_1, u_2, \quad a < a'$,
- b) $0 < u_1, u_2, \quad a' < a$,
- c) $u_1, u_2 < 0, \quad a < a'$,
- d) $u_1, u_2 < 0, \quad a' < a$.

a) 1) Aus der Existenz eines x mit

$$(\alpha) \quad \begin{cases} T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2), & a \leq x; \\ \text{zu } x \text{ gibt es kein } \bar{x} \text{ mit } a < \bar{x} < x \text{ und} \\ T(u_1, \bar{x}, v_1) \geq T(u_2, \bar{x}, v_2) \end{cases}$$

folgt die Existenz eines x^* mit $x < x^*$ und der Eigenschaft (α): Man bestimme x^* durch $T(u_1, x^*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$. Wegen $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x^*, v_1)$, $u_1 > 0$ ist dann nach (2a) $x < x^*$ und daher $T(u_2, x, v_2) < T(u_2, x^*, v_2)$, also $T(u_1, x^*, v_1) < T(u_2, x^*, v_2)$. Angenommen, es existierte zu x^* ein $\bar{x}$ mit

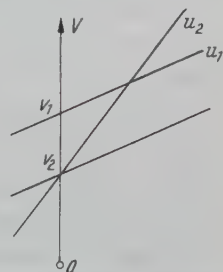


Fig. 13

^{6a)} Und zwar ohne die vorausgesetzte Vollständigkeit zu verwenden.

$a < \bar{x} < x^*$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geq T(u_2, \bar{x}, v_2)$. Da es zu x kein solches Element $\bar{x}$ gibt, muß $x < \bar{x} < x^*$ sein. Dann ist aber $T(u_1, x^*, v_1) > T(u_1, \bar{x}, v_1) \geq T(u_2, \bar{x}, v_2) > T(u_2, x, v_2)$, was wegen $T(u_1, x^*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$ ein Widerspruch ist.

2) Aus der Existenz eines x mit

$$(\beta) \quad T(u_1, x, v_1) > T(u_2, x, v_2), \quad a' \geq x > a$$

folgt die Existenz eines x_* mit $x > x_*$ und der Eigenschaft (β) : Man bestimme x_* durch $T(u_1, x_*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$. Dann ist $T(u_1, x_*, v_1) < T(u_1, x, v_1)$, $u_1 > 0$ und daher nach (2a) $x_* < x$. Wäre $x_* \leq a$, so wäre $T(u_1, x_*, v_1) \leq T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2) < T(u_2, x, v_2)$, was offenbar ein Widerspruch zu $T(u_1, x_*, v_1) = T(u_2, x, v_2)$ ist.

b) Vertauscht man die Indizes 1 und 2 und a mit a' , so erhält man $0 < u_1, u_2$, $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ und $a < a'$; man kann also den Fall b) so auf den Fall a) zurückführen.

c) Der Beweis für c) verläuft ganz entsprechend wie der für a).

1) Aus der Existenz eines x mit der in a1) angegebenen Eigenschaft (α) folgt die Existenz eines x^* mit $x < x^*$ und der Eigenschaft (α) : Man bestimme x^* durch $T(u_2, x^*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$. Wegen $T(u_2, x^*, v_2) < T(u_2, x, v_2)$, $u_2 < 0$ ist dann nach (2a) $x < x^*$ und daher $T(u_1, x^*, v_1) < T(u_2, x^*, v_2)$. Gäbe es zu x^* ein $\bar{x}$ mit $a < \bar{x} < x^*$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geq T(u_2, \bar{x}, v_2)$, so müßte $x < \bar{x} < x^*$ sein und somit wäre $T(u_2, x^*, v_2) < T(u_2, \bar{x}, v_2) \leq T(u_1, \bar{x}, v_1) < T(u_1, x, v_1)$, was der Bedingung $T(u_2, x^*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$ widerspräche.

2) Ist x ein Element mit der Eigenschaft (β) , so bestimme man x_* durch $T(u_2, x_*, v_2) = T(u_1, x, v_1)$. Wegen $T(u_2, x_*, v_2) > T(u_2, x, v_2)$, $u_2 < 0$ ist $x_* < x$, und da aus $x_* \leq a$ aber die falsche Aussage $T(u_1, x, v_1) = T(u_2, x_*, v_2) \geq T(u_2, a, v_2) > T(u_1, x, v_1)$ folgen würde, muß $x_* > a$ sein; also gilt $x > x_* > a$.

d) Durch Vertauschen der Indizes 1, 2 und der Elemente a, a' erhält man $u_1, u_2 < 0$, $T(u_1, a, v_1) < T(u_2, a, v_2)$, $T(u_1, a', v_1) > T(u_2, a', v_2)$ mit $a < a'$; hat also diesen Fall auf den Fall c) zurückgeführt.

Es sei $\mathfrak{X}$ die Menge aller x mit den folgenden Eigenschaften:

$$T(u_1, x, v_1) < T(u_2, x, v_2), \quad a \leq x;$$

zu x existiert kein $\bar{x}$ mit $a < \bar{x} < x$ und $T(u_1, \bar{x}, v_1) \geq T(u_2, \bar{x}, v_2)$.

Wegen $a \in \mathfrak{X}$ ist $\mathfrak{X}$ nicht leer. Es ist a' eine obere Schranke der Menge $\mathfrak{X}$, wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{K}$ existiert daher die obere Grenze $\bar{a}$ von $\mathfrak{X}$. Es gilt $a \leq \bar{a} < a'$. Angenommen, es wäre $T(u_1, \bar{a}, v_1) \neq T(u_2, \bar{a}, v_2)$. Dann wäre $T(u_1, \bar{a}, v_1) < T(u_2, \bar{a}, v_2)$ oder $T(u_1, \bar{a}, v_1) > T(u_2, \bar{a}, v_2)$. Im ersten Fall gäbe es nach 1) ein $\bar{a}^*$ mit $\bar{a} < \bar{a}^*$ und der Eigenschaft (α) , d.h. es wäre $\bar{a}^* \in \mathfrak{X}$ und $\bar{a}^* > \bar{a}$ im Widerspruch dazu, daß $\bar{a}$ die obere Grenze von $\mathfrak{X}$ ist. Im zweiten Fall gäbe es nach 2) ein $\bar{a}_*$ mit der Eigenschaft (β) und $\bar{a} > \bar{a}_* > a$, weshalb $\bar{a}$ wiederum nicht die obere Grenze von $\mathfrak{X}$ sein könnte. Also gilt $T(u_1, \bar{a}, v_1) = T(u_2, \bar{a}, v_2)$.

II) Angenommen, für alle x sei $T(u_1, x, v_1) \geq T(u_2, x, v_2)$ [für den Fall, daß $T(u_1, x, v_1) \leq T(u_2, x, v_2)$ für alle x gilt, verläuft der Beweis entsprechend]. Dann ist auch $T(u_1, 0, v_1) \geq T(u_2, 0, v_2)$, d.h. $v_1 \geq v_2$. Nach (2a) ist $\bar{v} = T(1, 1, v_1) > T(1, 0, v_1) = v_1$; man ziehe durch $\bar{v}$ die Parallele zu der durch $y = T(u_1, x, v_1)$ bestimmten Geraden. Nach Definition 1 (1) ist dann $T(u_1, x, v_1) < T(u_1, x, \bar{v})$, und wegen unserer obigen Annahme folgt hieraus $T(u_2, x, v_2) < T(u_1, x, \bar{v})$ für alle x , was wegen $u_1 \neq u_2$ ein Widerspruch ist.

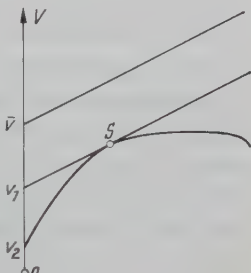


Fig. 14

Man könnte auf die Vermutung kommen, daß vielleicht jeder angeordnete Ternärkörper $\mathfrak{R}$ sich bei Erhaltung seiner Anordnung in einen vollständigen Ternärkörper einbetten lasse. Aus der Vollständigkeit von $\mathfrak{R}$ folgt aber, daß $\mathfrak{R}$ archimedisch angeordnet ist. Beweis: Es ist zu zeigen, daß es zu Elementen a, b, a', b' mit $b' < a' < 0 < a < b$ stets natürliche Zahlen n, n' mit $n' \cdot a' < b'$, $b < n \cdot a$ gibt, wobei $n \cdot a$ folgendermaßen definiert ist: $0 \cdot a = 0$, $(n+1) \cdot a = a + n \cdot a$. Angenommen, $\mathfrak{R}$ sei nichtarchimedisch angeordnet. Dann gäbe es also zwei Elemente a, b mit $0 < a < b$ und $n \cdot a < b$ für alle n . Das Element b ist eine obere Schranke der Menge $\{n \cdot a; n = 0, 1, \dots\}$, und daher existiert deren obere Grenze $\bar{a}$. Es ist also $n \cdot a \leq \bar{a}$ für jedes n und wegen der Monotonie der Addition auch $a + n \cdot a \leq a + \bar{a}$ für jedes n ; d.h. $a + \bar{a}$ ist eine obere Schranke der Menge $\{a + n \cdot a; n = 0, 1, 2, \dots\}$. Sei c irgendeine obere Schranke von $\{a + n \cdot a; n = 0, 1, \dots\}$. Man bestimme c' durch $c = a + c'$; dann ist $a + n \cdot a \leq a + c'$ für jedes n und wegen der Monotonie der Addition somit auch $n \cdot a \leq c'$ für jedes n , also $\bar{a} \leq c'$ und daher auch $a + \bar{a} \leq a + c' = c$; folglich ist $\bar{a}' = a + \bar{a}$ die obere Grenze von $\{a + n \cdot a; n = 0, 1, 2, \dots\}$. Wegen $a + n \cdot a = (n+1) \cdot a$ hat diese Menge aber die obere Grenze $\bar{a}$, und es wäre somit $\bar{a} = a + \bar{a}$, also $a = 0$, was ein Widerspruch zu $a > 0$ ist. Genauso beweist man, daß die Annahme, es gäbe zwei Elemente a', b' mit $b' < a' < 0$ und $n' \cdot a' < b'$ für alle n' , zu einem Widerspruch führt.

Läßt sich ein Ternärkörper $\mathfrak{R}$ bei Erhaltung seiner Anordnung in einen vollständigen Ternärkörper $\mathfrak{R}'$ einbetten, so ist $\mathfrak{R}'$ archimedisch angeordnet und daher auch $\mathfrak{R}$. Es können also nur archimedisch angeordnete Ternärkörper in vollständige eingebettet werden.

Der Hilbertsche Potenzreihenkörper⁸⁾ in einer Unbestimmten t über dem rationalen Zahlkörper ist ein nichtarchimedisch angeordneter Ternärkörper; er ist also ein Beweis dafür, daß es durchaus angeordnete Ternärkörper gibt, die sich nicht in vollständige Ternärkörper bei Erhaltung ihrer Anordnung einbetten lassen.

Wir haben gesehen, daß sich in vollständigen wie auch in Quasikörpern die Bedingung (2) der Definition 1 aus den Anordnungsgesetzen (1), (2a) und

⁷⁾ Wie man sofort erkennt, bleibt der folgende Beweis auch gültig, wenn man statt dessen $(n+1) \cdot a = n \cdot a + a$ setzt.

⁸⁾ Siehe [1], S. 107.

(2b) herleiten läßt. Der eben angeführte Hilbertsche Potenzreihenkörper ist ein angeordneter Ternärkörper, in dem die Bedingung (2) nicht auf Grund der Vollständigkeit aus (1), (2a) und (2b) folgt, aber dieser Ternärkörper ist ein Quasikörper. Daher liegt die Frage nahe, ob es einen angeordneten Ternärkörper gibt, der weder ein Quasikörper noch vollständig ist. Das folgende Beispiel einer nichtarchimedisch angeordneten echten Cartesischen Gruppe C beantwortet diese Frage bejahend.

C bilde man aus einem nichtarchimedisch angeordneten Schiefkörper K (beispielsweise dem Hilbertschen Potenzreihenkörper) durch folgendes Verfahren (s. [4], S. 93):

Als Addition von C nehme man die Addition von K ; die neue Multiplikation $\circ$ von C bilde man folgendermaßen aus der alten Multiplikation $\cdot$ von K :

$$a \circ b = \begin{cases} ab & \text{für } a \geq 0 \quad \text{oder} \quad b \geq 0, \\ akb & \text{für } a, b < 0, \end{cases}$$

wobei k ein positives, von 1 verschiedenes Element aus K ist. Daß die so erhaltene algebraische Struktur C eine echte Cartesische Gruppe ist, ist in [4], S. 93–94, bewiesen.

Die Anordnung in C sei genauso wie die Anordnung in K erklärt. Da die Addition von C mit der Addition von K übereinstimmt, und K ein angeordneter Schiefkörper ist, gelten auch in C die Monotoniegesetze der Addition. Somit ist nur noch die Gültigkeit von

$$(*) \quad a \circ c - a \circ d < b \circ c - b \circ d \quad \text{für } a < b, c > d$$

nachzuweisen. Wir zeigen hierzu, daß die Abbildung $x \rightarrow x \circ c - x \circ d$ für $c > d$ monoton wachsend ist; denn dann folgt aus $a < b$, daß $a \circ c - a \circ d < b \circ c - b \circ d$ ist, also gerade unsere Ungleichung (*). Im Falle $c > d$ gilt

$$x \circ c - x \circ d = \begin{cases} x(c-d) & \text{für } d \geq 0 \\ x(c-kd) & \text{für } x < 0, c \geq 0, d < 0 \\ xk(c-d) & \text{für } x < 0, c < 0, d < 0 \\ x(c-d) & \text{für } x \geq 0 \end{cases},$$

und daher ist die Abbildung $x \rightarrow x \circ c - x \circ d$ für $c > d$ tatsächlich monoton wachsend. Nach Anmerkung 3 von § 7 ist C also eine angeordnete Cartesische Gruppe, und ihre Anordnung ist nichtarchimedisch, weil K nichtarchimedisch angeordnet ist.

§ 9. Ternärkörper, in denen gewisse Monotoniegesetze nicht erfüllt sind

Es interessiert nun die Frage, wieweit die einzelnen Monotoniegesetze voneinander unabhängig sind; d.h. gibt es Ternärkörper, in denen eine lineare Anordnung erklärt ist, für die gewisse Monotoniegesetze erfüllt, andere jedoch verletzt sind?

Daß Definition 1 (1) von Definition 1 (2) unabhängig ist, leuchtet unmittelbar ein; denn man braucht ja nur von einem Körper K mit der Anordnung $<$ auszugehen und in diesem eine neue Anordnung $\dot{<}$ durch die folgende Vorschrift einzuführen:

$$a \dot{<} b \text{ genau dann, wenn } a > b.$$

Dann gelten natürlich auch für die Anordnung $\dot{<}$ die Monotoniegesetze der Addition, wegen $0 \dot{>} 1$ aber nicht die Monotoniegesetze der Multiplikation; d.h. die Bedingung (1) von Definition 1 ist erfüllt, aber nicht die Bedingung (2). Bei einem Quasikörper folgt aus der Gültigkeit des additiven und des einen multiplikativen Monotoniegesetzes die Gültigkeit des anderen multiplikativen Monotoniegesetzes. Das folgende Beispiel einer Cartesischen Gruppe M , in der die Bedingungen (1) und (2b) gelten, (2a) aber nicht erfüllt ist, beweist, daß bei einem Ternärkörper die Bedingung (2a) von (1) und (2b) [bzw. (2b) von (1) und (2a)] im allgemeinen unabhängig ist. M bilden wir wieder durch Abänderung der Multiplikation aus dem Hilbertschen Potenzreihenkörper K in einer Unbestimmten t über dem rationalen Zahlkörper. Die Elemente von K seien in der Form $a = a_\alpha t^\alpha + a_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \dots$ ($\alpha =$ kleinster Exponent, $a_\alpha \neq 0$) geschrieben.

w_0 sei eine p -adische Bewertung des rationalen Zahlkörpers. Dann ist die durch $\begin{cases} w(a) = w_0(a_\alpha) & \text{für } a \neq 0 \\ w(0) = \infty \end{cases}$ definierte Funktion w eine Bewertung des Hilbertschen Potenzreihenkörpers; denn es ist

$$\begin{aligned} w(ab) &= w((a_\alpha t^\alpha + \dots)(b_\beta t^\beta + \dots)) = w(a_\alpha b_\beta t^{\alpha+\beta} + \dots) = w_0(a_\alpha b_\beta) \\ &= w_0(a_\alpha) + w_0(b_\beta) = w(a) + w(b) \quad \text{und} \quad w(a+b) \geq \text{Min}(w(a), w(b)). \end{aligned}$$

Durch $\begin{cases} v(a) = \alpha & \text{für } a \neq 0 \\ v(0) = \infty \end{cases}$ wird eine weitere Bewertung v für K erklärt.

$\mathfrak{B}$ sei die Menge der von w angenommenen, von 0 und ∞ verschiedenen Funktionswerte, $\mathfrak{V}$ die Menge der von v angenommenen, von 0 und ∞ verschiedenen Funktionswerte und k ein Element aus K mit $w(k) = v(k) = 0$, $k > 0$, $k \neq 1$. Als Elemente von M wählen wir die Elemente von K ; die neuen Verknüpfungen $\dot{+}$ und $\circ$ von M gewinnen wir folgendermaßen aus den alten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ von K :

$$a \dot{+} b = a + b, \quad a \circ b = \begin{cases} akb & \text{für } v(a) \in \mathfrak{B} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{B}, \\ ab & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $0 \circ a = 0a = 0 = a0 = a \circ 0$ und $1 \circ a = 1a = a = a1 = a \circ 1$ für alle a . Um zu zeigen, daß M eine Cartesische Gruppe ist, sind also nur noch die beiden folgenden Eigenschaften nachzuweisen:

- (1) Zu Elementen $a, b, c \in M$ mit $a \neq b$ existiert genau ein $x \in M$ mit $x \circ a - x \circ b = c$.
- (2) Zu Elementen $a, b, c \in M$ mit $a \neq b$ gibt es genau ein $y \in M$ mit $-a \circ y + b \circ y = c$.

Beweis von (1): Wir setzen $x \circ a - x \circ b = xq_1a - xq_2b$, wobei

$$q_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(x) \in \mathfrak{B} \text{ und } w(a) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(x) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(a) \notin \mathfrak{B} \end{cases},$$

$$q_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(x) \in \mathfrak{B} \text{ und } w(b) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(x) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(b) \notin \mathfrak{B} \end{cases}$$

ist. Wir beweisen für die gesuchte Lösung x zunächst die folgende Gleichung:

$$v(x) + v(a - b) = v(c).$$

Im Falle $w(a) = w(b)$ ist $q_1 = q_2$ und daher $v(x) + v(a - b) = v(c)$.

Ist $w(a) \neq w(b)$, so auch $w(q_1a) \neq w(q_2b)$ und somit $|a_\alpha| \neq |b_\beta|$, $|q_1a_\alpha| \neq |q_2b_\beta|$. Es ist also $a_\alpha - b_\beta \neq 0$ und $q_1a_\alpha - q_2b_\beta \neq 0$. Daher ist für $\alpha = \beta$ $v(a - b) = \text{Min}(v(a), v(b))$, $v(q_1a - q_2b) = \text{Min}(v(q_1a), v(q_2b)) = \text{Min}(v(a), v(b))$, also $v(x) + v(a - b) = v(c)$. Für $\alpha \neq \beta$ ist $v(q_1a) \neq v(q_2b)$ und deshalb ist auch in diesem Fall $v(q_1a - q_2b) = v(a - b) = \text{Min}(v(a), v(b))$ und somit $v(x) + v(a - b) = v(c)$. Es gilt also stets $v(x) = v(c) - v(a - b)$. Daher ist $v(x)$, folglich auch q_1, q_2 und damit x eindeutig bestimmt.

Beweis von (2): Entsprechend dem Beweis von (1) setzen wir $-a \circ y + b \circ y = -ah_1y + bh_2y$, wobei

$$h_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(a) \in \mathfrak{B}, \quad w(y) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(y) \notin \mathfrak{B} \end{cases},$$

$$h_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(b) \in \mathfrak{B}, \quad w(y) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(b) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(y) \notin \mathfrak{B} \end{cases}$$

ist, und zeigen, daß die gesuchte Lösung y der folgenden Gleichung genügen muß:

$$w(-a + b) + w(y) = w(c).$$

Im Falle $v(a) = v(b)$ ist $h_1 = h_2$ und daher $w(-a + b) + w(y) = w(c)$. Im Falle $v(a) \neq v(b)$ ist $\alpha \neq \beta$, und man erhält deshalb

$$w(-a + b) = \begin{cases} w(a) & \text{für } \alpha < \beta \\ w(b) & \text{für } \beta < \alpha \end{cases},$$

$$w(-h_1a + h_2b) = \begin{cases} w(a) & \text{für } \alpha < \beta \\ w(b) & \text{für } \beta < \alpha \end{cases},$$

also wieder $w(-a + b) + w(y) = w(c)$. Nach dieser Gleichung ist $w(y)$ und somit auch y eindeutig bestimmt. M ist also eine Cartesische Gruppe.

Die Anordnung in M sei genauso wie die Anordnung in K erklärt. Da die Addition in M mit der Addition in K übereinstimmt, ist Definition 1(1) erfüllt. Es soll nun die Gültigkeit des linksseitigen Monotoniegesetzes der Multiplikation, also die Bedingung (2b) für eine Cartesische Gruppe, nachgewiesen werden: Sei $a < b$, $a \circ c = am_1c$ mit

$$m_1 = \begin{cases} k & \text{für } v(a) \in \mathfrak{B} \text{ und } w(c) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(a) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(c) \notin \mathfrak{B} \end{cases}$$

und $b \circ c = b m_2 c$ mit

$$m_2 = \begin{cases} k & \text{für } v(b) \in \mathfrak{B} \text{ und } w(c) \in \mathfrak{B} \\ 1 & \text{für } v(b) \notin \mathfrak{B} \text{ oder } w(c) \notin \mathfrak{B}. \end{cases}$$

Da in K die Bedingung (2b) erfüllt ist, genügt es, die Beziehung

(*) $\operatorname{sgn}(a - b) = \operatorname{sgn}(a m_1 - b m_2)$ herzuleiten.

Für $m_1 = m_2$ erhält man (*) wegen $m_1 > 0$. Ist $m_1 \neq m_2$, so ist $w(c) \in \mathfrak{B}$, $v(a) \neq v(b)$, d.h. $\alpha \neq \beta$; daher ist

$$\operatorname{sgn}(a - b) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a & \text{für } \alpha < \beta \\ \operatorname{sgn} b & \text{für } \beta < \alpha \end{cases}$$

und

$$\operatorname{sgn}(a m_1 - b m_2) = \begin{cases} \operatorname{sgn} a & \text{für } \alpha < \beta \\ \operatorname{sgn} b & \text{für } \beta < \alpha, \end{cases}$$

also gilt auch in diesem Falle (*).

Um zu erkennen, daß das rechtsseitige Monotoniegesetz der Multiplikation dagegen im allgemeinen nicht erfüllt ist, wähle man z.B. $0 < k < 1$, $a = a_\alpha < b_\beta = b$, $w(a_\alpha) \notin \mathfrak{B}$, $w(b_\beta) \in \mathfrak{B}$, $kb < a < b$ und ein c mit $v(c) \in \mathfrak{B}$. Dann ist aber $c \circ a = ca > ckb = c \circ b$ für $a < b$, $c > 0$ und $c \circ a = ca < ckb = c \circ b$ für $a < b$, $c < 0$. M ist also eine Cartesische Gruppe, in der die Monotoniegesetze (1) und (2b) gelten, (2a) aber nicht erfüllt ist.

§ 10. Über den Zusammenhang zwischen angeordneten affinen Ebenen und affinen Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation erklärt ist

Der Begriff der Ordnungsfunktion ist von E. SPERNER eingeführt worden⁹⁾. Er bezeichnet als *Ordnungsfunktion* einer affinen Ebene eine Abbildung o aller Paare (ξ, X) mit $X \notin \xi$ in die Menge der ganzen Zahlen $\{1, -1\}$.

Einer jeden Ordnungsfunktion o kann man eine *Quasizwischenbeziehung* ϱ durch die folgende Vorschrift zuordnen:

(A) $\varrho(X, \xi, Y)$ genau dann, wenn $(\xi, X)^o (\xi, Y)^o = -1$.

Die Quasizwischenbeziehung ϱ ist also eine ternäre Relation mit den beiden folgenden Eigenschaften:

(B) $X, Y \notin \xi$, wenn $\varrho(X, \xi, Y)$.

(B') Wenn $X_i \notin \xi$ ($i = 1, 2, 3$), so gilt $\varrho(X_i, \xi, X_k)$ für keins oder für genau zwei der Paare (i, k) mit $i < k$.

Die Bedingung (B') ist für nichtkollineare X_i gerade das Axiom von PASCH. Es fragt sich nun, wann sich bei einer Quasizwischenbeziehung ϱ die Abhängigkeit von ξ allein durch den Schnittpunkt von ξ mit der Verbindungs-

⁹⁾ Siehe [5].

geraden des ersten und dritten Argumentes ausdrückt. Hierzu muß offenbar die folgende Bedingung erfüllt sein:

$$(C) \quad (\xi, X)^o (\xi, Y)^o (\eta, X)^o (\eta, Y)^o = 1, \text{ falls } X, Y \notin \xi, \eta \text{ sowie } XY \cap \xi = XY \cap \eta.$$

(C) heißt die *Geradenrelation* einer Ordnungsfunktion o . In [5] ist bewiesen, daß die Geradenrelation für eine Ordnungsfunktion o notwendig und hinreichend dafür ist, daß die durch sie bestimmte Quasizwischenbeziehung ϱ (mittleres Argument Gerade, die beiden äußeren Argumente Punkte) durch

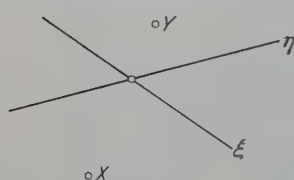


Fig. 15

$$(D) \quad \varrho^*(X, Z, Y) \text{ gleichbedeutend mit } \varrho(X, \xi, Y), \text{ falls } XZ = YZ, X, Y \notin \xi, Z \in \xi, \text{ und } XZ = YZ, \text{ falls } \varrho^*(X, Z, Y)$$

eine ternäre Relation ϱ^* in der Menge der Punkte liefert.

Wegen (B) und (B') erfüllt die durch (D) ϱ zugeordnete ternäre Relation ϱ^* die beiden folgenden Bedingungen:

$$(E) \quad X, Y \neq Z, \text{ wenn } \varrho^*(X, Z, Y).$$

$$(E') \quad \text{Wenn } X_i \neq Z \ (i = 1, 2, 3), \text{ so gilt } \varrho^*(X_i, Z, X_k) \text{ für keins oder für genau zwei der Paare } (i, k) \text{ mit } i < k.$$

Eine jede in einer affinen Ebene mit (B) und (B') erklärte Quasizwischenbeziehung ϱ kann man, wie in [5], S. 110, bewiesen ist, durch eine solche Ordnungsfunktion o beschreiben, daß o dann in der in (A) angegebenen Weise mit ϱ zusammenhängt. Man kann also in einer angeordneten affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ eine solche Ordnungsfunktion o' erklären, daß o' durch (D) und (A) gerade die für jede Punktreihe von $\mathfrak{E}_\omega$ definierte Zwischenrelation liefert.

Ist in einer Punktmenge eine Zwischenbeziehung erklärt, so liegt von drei voneinander verschiedenen Punkten genau einer zwischen den beiden anderen, d.h. aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$ folgt, daß genau eine der drei Relationen

$$(F_0) \quad A_1 A_2 A_3, A_2 A_1 A_3, A_2 A_3 A_1$$

richtig ist. Aus (F_0) erhält man für o' die folgende Aussage:

Aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$, $A_1, A_2, A_3 \in \beta$, $A_i \in \alpha_i \neq \beta$ ($i = 1, 2, 3$) folgt, daß genau einer der drei Werte

$$(F) \quad (\alpha_2, A_1)^{o'} (\alpha_2, A_3)^{o'}, \quad (\alpha_1, A_2)^{o'} (\alpha_1, A_3)^{o'}, \quad (\alpha_3, A_1)^{o'} (\alpha_3, A_2)^{o'}$$

gleich -1 ist.

Allgemein bezeichnet man bei einer Ordnungsfunktion die Anzahl der Werte von (F), die gleich -1 sind, mit Z . Eine Ordnungsfunktion, bei der Z für alle möglichen linearen Tripel denselben Wert hat, heißt *einfach*.

Unter der *Parallelenbedingung* für eine Ordnungsfunktion o versteht man die folgende Aussage:

$$(G) \quad (\xi, X)^o = (\xi, Y)^o, \quad \text{wenn } XY \parallel \xi.$$

Die hier gebrachten Beweismethoden des Satzes 1 und der Sätze über monotonen Fallen bzw. Wachsen für Ternärkörper angeordneter affiner Ebenen

lassen sich nicht auf Ternärkörper affiner Ebenen mit Ordnungsfunktionen übertragen, da hierbei die Voraussetzung $Z \neq 1$ wesentlich benutzt wurde. Es gilt jedoch, daß die einer Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und Parallelenbedingung zugeordnete ternäre Relation gegenüber Parallelprojektionen invariant ist; hiermit lassen sich solche Monotoniegesetze in dem durch O, U, V, E bestimmten Ternärkörper einer affinen Ebene herleiten, daß in einer affinen Ebene genau dann eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und Parallelenbedingung erklärt ist, wenn in ihrem zugehörigen Ternärkörper durch (E) und (E') eine ternäre Relation definiert werden kann, welche diesen Monotoniegesetzen genügt (Satz 10 und 11).

Von F. BACHMANN und W. KLINGENBERG ist der folgende Satz (H) bewiesen:

- (H) Eine in jeder Punktreihe einer affinen Ebene erklärte ternäre Relation ϱ^* geht genau dann gemäß (D) aus einer Quasizwischenbeziehung ϱ mit

$$\varrho(X, \xi, Y) \text{ falsch, wenn } XY \parallel \xi$$

hervor, wenn sie bei Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum erhalten bleibt und die Eigenschaft besitzt:

(I) $X \neq Y \neq Z \neq X$, wenn $\varrho^*(X, Z, Y)$;

(I') im Falle $Z \neq X_i$ ($i=1, 2, 3$) gilt $\varrho^*(X_i, Z, X_k)$ für keins oder für genau zwei der Paare (i, k) mit $i < k$.

Die Quasizwischenbeziehung ϱ ist dann durch ϱ^* eindeutig bestimmt. Mit Hilfe dieses Satzes werden wir die Sätze 10 und 11 beweisen.

SATZ 10. In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei eine Ordnungsfunktion o mit Geradenrelation und Parallelenbedingung erklärt. Dann gelten in dem durch O, U, V, E bestimmten Ternärkörper $\mathfrak{K}$ bezüglich der durch o hervorgerufenen ternären Relation ϱ^* die drei folgenden Aussagen:

- (1) $\varrho^*(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3))$ genau dann, wenn $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.
- (2) Existieren $\bar{u}, \bar{v} \in \mathfrak{K}$ mit $T(u, x_i, v_i) = T(\bar{u}, x_i, \bar{v})$ ($i=1, 2, 3$), so gilt $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ genau dann, wenn $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ gilt.
- (3) $\varrho^*(T(u, x_1, v), T(u, x_2, v), T(u, x_3, v))$ genau dann, wenn $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ und $u \neq 0$.

Beweis. Nach Satz (H) ist die durch (A) und (D) für die Punkte einer jeden der Punktfolgen von $\mathfrak{E}_\omega$ gegebene ternäre Relation ϱ^* gegenüber Parallelprojektionen invariant. Auf Grund dieser Invarianz von ϱ^* bei affinen Perspektivitäten ergeben sich die Monotonieaussagen (1), (2) und (3).

Zu (1): Wir bezeichnen die durch $y = T(u, x, v_i)$ ($i=1, 2, 3$) bestimmten Geraden mit α_i und die Gerade der Punkte mit Abszisse x mit β . Wegen $\alpha_i \nparallel OV$, β existieren die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$ und die zu σ_1 inverse Parallelprojektion σ_1^{-1} . Es sei σ_2 die Parallel-

projektion von β auf OV mit dem Zentrum U und σ_2^{-1} die zu σ_2 inverse Parallelprojektion. Da die ternäre Relation ϱ^* gegenüber affinen Perspektivitäten invariant ist, folgt $\varrho^*(v_1^{\sigma_1 \sigma_2}, v_2^{\sigma_1 \sigma_2}, v_3^{\sigma_1 \sigma_2})$, d.h. $\varrho^*(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3))$, aus $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ und ebenso $\varrho^*(T(u, x, v_1)^{\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, T(u, x, v_2)^{\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, T(u, x, v_3)^{\sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}})$, d.h. $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$, aus $\varrho^*(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3))$.

Zu (2): Die durch $y = T(u, x_i, v_i)$ ($i = 1, 2, 3$) gegebenen Geraden nennen wir α_i , und die durch $y = T(\bar{u}, x, \bar{v})$ bestimmte Gerade bezeichnen wir mit β . Wegen $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ sind die v_i verschieden und daher ist $u \neq \bar{u}$, also $\alpha_i \nparallel \beta$. Folglich existieren die Parallelprojektion σ_1 von OV auf β mit dem Zentrum $\alpha_i \cap UV$ und ihre Inverse σ_1^{-1} . Ferner gibt es die Parallelprojektion σ_2 von β

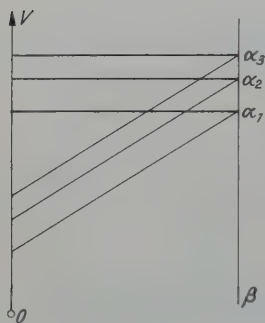


Fig. 16

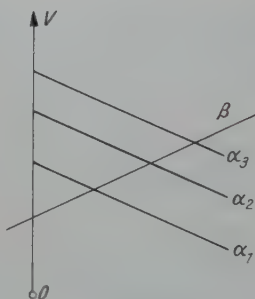


Fig. 17

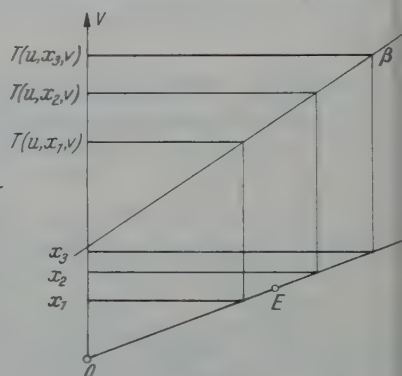


Fig. 18

auf OE mit dem Zentrum V , die Parallelprojektion σ_3 von OE auf OV mit dem Zentrum U und die zu diesen beiden inversen $\sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}$.

Wegen der Invarianz von ϱ^* bei Parallelprojektionen erhält man aus $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$ somit $\varrho^*(v_1^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, v_2^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, v_3^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3})$, also $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$, und aus $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ folgt $\varrho^*(x_1^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, x_2^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, x_3^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}})$, d.h. $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.

Zu (3): Die durch $y = T(u, x, v)$ bestimmte Gerade bezeichnen wir mit β . Es sei σ_1 die Parallelprojektion von OV auf OE mit dem Zentrum U , σ_2 die Parallelprojektion von OE auf β mit dem Zentrum V , ferner σ_3 die Parallelprojektion von β auf OV mit dem Zentrum U und $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \sigma_3^{-1}$ seien die Inversen zu diesen Parallelprojektionen. Wegen $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ und der Invarianz von ϱ^* bei Parallelprojektionen gilt somit $\varrho^*(x_1^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, x_2^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3}, x_3^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3})$, d.h. $\varrho^*(T(u, x_1, v), T(u, x_2, v), T(u, x_3, v))$, und umgekehrt erhält man

$$\varrho^*(T(u, x_1, v)^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, T(u, x_2, v)^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}, T(u, x_3, v)^{\sigma_3^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_1^{-1}}),$$

also $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$, aus $\varrho^*(T(u, x_1, v), T(u, x_2, v), T(u, x_3, v))$.

SATZ 11. Der Ternärkörper $\mathfrak{R}$ der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ enthalte mindestens drei verschiedene Elemente, und für seine Elemente sei eine ternäre Relation ϱ^* mit (E) und (E') definiert, bezüglich der die ternäre Verknüpfung T die Monotoniegesetze (1), (2), (3) von Satz 10 erfüllt. Dann existiert in $\mathfrak{E}_\omega$ eine Ordnungsfunktion o mit Geradenrelation und Parallelenbedingung, die in $\mathfrak{R}$ gerade die ternäre Relation ϱ^* mittels (A) und (D) hervorruft.

Beweis. Für jede der Punktreihen von $\mathfrak{E}_\omega$ erklären wir folgendermaßen eine ternäre Relation ϱ^* :

- (α) $\varrho^*((a, y_1), (a, y_2), (a, y_3))$ genau dann, wenn $\varrho^*(y_1, y_2, y_3)$.
 (β) $\varrho^*((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3))$ mit $y_i = T(u, x_i, v)$ ($i = 1, 2, 3$) genau dann, wenn $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$.

Der Nachweis, daß ϱ^* gegenüber Parallelprojektionen invariant ist, verläuft wie in Satz 5: Die Urbildgerade wird mit α , ihre Punkte werden mit $P_i = (x_i, y_i)$, die Bildgerade wird mit α' und der Bildpunkt von P_i auf α' mit $P'_i = (x'_i, y'_i)$ bezeichnet. Falls V das Zentrum der Parallelprojektion ist, kann weder α noch α' durch V gehen, und ϱ^* ist daher auf α wie auf α' durch (β) gegeben. Aus $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$ folgt somit $\varrho^*(x_1, x_2, x_3)$ und hieraus $\varrho^*(P'_1, P'_2, P'_3)$.

Um die Invarianz von ϱ^* bei einer Parallelprojektion mit einem von V verschiedenen Zentrum nachzuweisen, genügt es, wie in Satz 5 bewiesen wurde, die Invarianz von ϱ^* bei einer Parallelprojektion von OV auf α' wie bei der zu dieser Parallelprojektion inversen zu zeigen.

Ist $V \in \alpha'$, so setze man $v_i = P_i$ ($i = 1, 2, 3$) und $u = ((\lambda \cap EV) \cup U) \cap OV$, wobei λ die Parallele zu $P_i P'_i$ durch 0 sei. Dann gilt $\varrho^*(T(u, x, v_1), T(u, x, v_2), T(u, x, v_3))$, d.h. $\varrho^*(P'_1, P'_2, P'_3)$, genau für $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$.

Ist $V \notin \alpha'$, so setze man $\bar{u} = ((\mu \cap EV) \cup U) \cap OV$, wobei μ die Parallele zu α' durch 0 sei, und $\bar{v} = \alpha' \cap OV$. Nach Satz 10(2) erhält man $\varrho^*(x'_1, x'_2, x'_3)$ genau dann, wenn $\varrho^*(v_1, v_2, v_3)$, d.h. $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$, gilt. Aus $\varrho^*(x'_1, x'_2, x'_3)$ folgt wegen (β) $\varrho^*(P'_1, P'_2, P'_3)$, und umgekehrt folgt aus $\varrho^*(P'_1, P'_2, P'_3)$ auch $\varrho^*(x'_1, x'_2, x'_3)$. Somit gilt $\varrho^*(P'_1, P'_2, P'_3)$ genau für $\varrho^*(P_1, P_2, P_3)$. Die durch (α) und (β) für eine jede Punktreihe von $\mathfrak{E}_\omega$ erklärte ternäre Relation ϱ^* bleibt also bei Perspektivitäten mit uneigentlichem Zentrum erhalten und erfüllt wegen (E) und (E') auch die unter (H) angegebenen Bedingungen (I) und (I'), folglich geht sie nach diesem Satz aus einer Quasizwischenbeziehung ϱ hervor, welche die Eigenschaft hat:

(*) (X, ξ, Y) falsch, wenn $XY \parallel \xi$.

Nach (H) ist diese Quasizwischenbeziehung ϱ durch ϱ^* sogar eindeutig bestimmt. Wie auf S. 458 angegeben, kann man in $\mathfrak{E}_\omega$ eine solche Ordnungsfunktion o erklären, daß o die Quasizwischenbeziehung ϱ gerade mittels (A) liefert. Wegen der Eigenschaft (*) von ϱ und (A) ist $(\xi, X)^\circ(\xi, Y)^\circ = 1$ für $XY \parallel \xi$, d.h. o erfüllt die Parallelenbedingung.

In der affinen Ebene $\mathfrak{E}_\omega$ sei nun eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation und $Z = 1$ erklärt. Dann ist also genau einer der drei Werte von (F) gleich

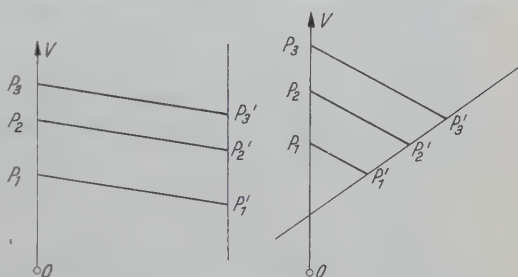


Fig. 19

Fig. 20

— 1. Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall unsere ternäre Relation ϱ^* eine Zwischenbeziehung ist.

Zunächst leiten wir $\varrho^*(C, B, A)$ aus $\varrho^*(A, B, C)$ her, ohne dabei die Voraussetzung $Z=1$ zu benutzen:

Wegen $\varrho^*(A, B, C)$ sind nach (E) $A, C \neq B$. Angenommen, es wäre $A=C$. Dann gälte mit $Z=B$, $X_1=X_2=X_3=A$ aber $\varrho^*(X_1, Z, X_2)$, $\varrho^*(X_1, Z, X_3)$ und $\varrho^*(X_2, Z, X_3)$, und die Bedingung (E') wäre somit verletzt; es muß also $A \neq C$ sein. Ich betrachte nun die Punkte $Y_1=C$, $Y_2=A$, $Y_3=C$, $Z=B$. Es ist $Z \neq Y_i$ ($i=1, 2, 3$) und nach Voraussetzung gilt $\varrho^*(Y_2, Z, Y_3)$. Nach (E') folgt daher $\varrho^*(Y_1, Z, Y_2)$ oder $\varrho^*(Y_1, Z, Y_3)$. Wegen $Y_1=Y_3$ kann aber $\varrho^*(Y_1, Z, Y_3)$ nicht gelten, und wir erhalten deshalb $\varrho^*(Y_1, Z, Y_2)$, d.h. $\varrho^*(C, B, A)$.

Ist genau einer der drei Werte von (F) gleich -1 , so besagt dies wegen (A) für die Quasizwischenbeziehung ϱ , daß aus $A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq A_1$, $A_1, A_2, A_3 \in \beta$, $A_i \in \alpha_i \neq \beta$ ($i=1, 2, 3$) entweder $\varrho(A_1, \alpha_2, A_3)$ oder $\varrho(A_2, \alpha_1, A_3)$ oder $\varrho(A_1, \alpha_3, A_2)$ folgt, und nach (D) bedeutet dies für ϱ^* , daß entweder $\varrho^*(A_1, A_2, A_3)$ oder $\varrho^*(A_2, A_1, A_3)$ oder $\varrho^*(A_1, A_3, A_2)$ gilt. Hieraus ergeben sich sofort die beiden folgenden Eigenschaften für ϱ^* :

$\varrho^*(A, B, C)$ falsch, wenn $\varrho^*(A, C, B)$;

$\varrho^*(A, B, C)$ oder $\varrho^*(B, C, A)$ oder $\varrho^*(C, A, B)$, wenn $A \neq B \neq C \neq A$.

Gilt $\varrho^*(A, B, C)$ und $D \neq A, B, C$, so wegen (E') auch $\varrho^*(D, B, C)$ oder $\varrho^*(A, B, D)$. Im Falle $Z=1$ besitzt ϱ^* also gerade die in [4], S. 222, angegebenen kennzeichnenden Eigenschaften einer Zwischenbeziehung.

Erfüllt die diese Zwischenbeziehung durch (A) und (D) bestimmende Ordnungsfunktion o' ferner die Parallelenbedingung (G) in $\mathfrak{E}_\omega$, so bleibt die durch o' in den Punktreihen von $\mathfrak{E}_\omega$ gegebene Zwischenbeziehung bei Parallelprojektionen invariant. Eine affine Ebene, in der eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z=1$ erklärt ist, ist also eine angeordnete affine Ebene. Umgekehrt kann man in jeder angeordneten affinen Ebene eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z=1$ erklären. Die angeordneten affinen Ebenen sind somit gerade die affinen Ebenen, in denen eine Ordnungsfunktion mit Geradenrelation, Parallelenbedingung und $Z=1$ erklärt ist.

Literatur

- [1] HILBERT, D.: Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl. Stuttgart 1956. — [2] KARZEL, H.: Ordnungsfunktionen in nichtdesarguesschen projektiven Geometrien. Math. Z. **62**, 268–291 (1955). — [3] NAUMANN, H.: Stufen der Begründung der ebenen affinen Geometrie. Math. Z. **60**, 120–141 (1954). — [4] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. — [5] SPERNER, E.: Die Ordnungsfunktionen einer Geometrie. Math. Ann. **121**, 107–130 (1949).

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 7. März 1958)

Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen

HELMUT HASSE zum 60. Geburtstag am 25. August 1958

Von

HELMUT WIELANDT

Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$. Wir bezeichnen mit $s\mathfrak{G}$ die Gesamtheit der subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ (das sind diejenigen, die sich von $\mathfrak{G}$ aus durch eine absteigende Normalkette endlicher Länge erreichen lassen, also die Normalteiler von $\mathfrak{G}$, die Normalteiler der Normalteiler von $\mathfrak{G}$, usw.). Wir bezeichnen mit $N\mathfrak{A}$ den Normalisator einer Untergruppe $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ und erklären eine charakteristische Untergruppe von $\mathfrak{G}$, den *Normalisator der subnormalen Untergruppen*, durch

$$Ns\mathfrak{G} = \bigcap_{\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}} N\mathfrak{A}.$$

Die Größe dieser Gruppe ist ein Maß dafür, „wie normal“ die subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ in ihrer Gesamtheit sind: Genau wenn $Ns\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ ist, fällt Subnormalität in $\mathfrak{G}$ mit Normalität zusammen. Wir stellen die Frage, wann $Ns\mathfrak{G}$ nicht trivial ist, d.h. nicht nur aus dem neutralen Element 1 besteht. Hierfür genügen, wie im folgenden gezeigt wird, überraschend schwache Voraussetzungen; z.B. ist für eine endliche Gruppe $\mathfrak{G} \neq 1$ auch stets $Ns\mathfrak{G} \neq 1$. Unser Hauptergebnis für beliebige Gruppen lautet:

(1) $Ns\mathfrak{G}$ enthält

- (a) jede einfache nichtabelsche subnormale Untergruppe von $\mathfrak{G}$,
- (b) jeden minimalen Normalteiler von $\mathfrak{G}$, dessen subnormale Untergruppen die Minimalbedingung erfüllen.

Wir gewinnen diese Aussagen aus schärferen. Zunächst leiten wir (1a) aus dem folgenden, für endliche Gruppen schon bekannten¹⁾ Satz ab:

(2) Sei $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$, $\mathfrak{E} \in s\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} = 1$, $\mathfrak{E}$ einfach und nichtabelsch. Dann sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$ elementweise vertauschbar, d.h. es ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E} = 1$.

Daß hieraus (1a) folgt, ist leicht zu sehen: Ist $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E} \in s\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} \in s\mathfrak{E}$ (loc. cit., Satz 2). Wenn nun also $\mathfrak{E}$ einfach ist, so ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{E} = \mathfrak{E}$ oder $= 1$. Im ersten Fall haben wir $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{A} \leq N\mathfrak{A}$; im zweiten Fall ist $\mathfrak{E} \leq N\mathfrak{A}$ nach (2).

Dem Beweis von (2) schicken wir zwei auch sonst nützliche Bemerkungen voraus.

¹⁾ In einer endlichen Gruppe sind je zwei subnormale Untergruppen mit dem Durchschnitt 1, welche keine Primzahl als Kompositionsfaktor gemeinsam haben, elementweise vertauschbar. Diese Aussage und Verschärfungen davon finden sich als Satz 17—19 bei H. WIELANDT: Eine Verallgemeinerung der invarianten Untergruppen. Math. Z. **45**, 209—244 (1939).

(3) Sei $\mathfrak{A} \in \mathfrak{s} \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{G}$. Wir bilden das Erzeugnis der Konjugierten von $\mathfrak{A}$ unter $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} = \bigcup_{M \in \mathfrak{M}} \mathfrak{A}^M \quad (\mathfrak{A}^M = M^{-1} \mathfrak{A} M).$$

Ist dann $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}}$, so ist $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}$.

Beweis. Setzen wir $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{M} = \mathfrak{F}$, so wird $\mathfrak{F} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} \cup \mathfrak{M} = \mathfrak{A}^{\mathfrak{M}} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} \leq \mathfrak{F}$. Also ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$; andererseits ist $\mathfrak{A} \in \mathfrak{s} \mathfrak{F}$. Beides verträgt sich nur dann, wenn $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$ ist (woraus dann $\mathfrak{M} \leq \mathfrak{A}$ folgt). Dies ergibt sich aus der folgenden Bemerkung:

(4) Für jede subnormale Untergruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{G}$ bezeichne $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$ die Länge einer kürzesten von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$ führenden Normalkette (so daß $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = 0$ so viel besagt wie $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}$). Dann ist für $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{A}$ stets $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| + 1$.

Beweis: Ist $\mathfrak{H}$ das größte von $\mathfrak{G}$ verschiedene Glied einer kürzesten Normalkette von $\mathfrak{G}$ nach $\mathfrak{A}$, so ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \leq \mathfrak{H}$, daher $|\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{H} - \mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| - 1$. Andererseits ist $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ normal in $\mathfrak{G}$, daher $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| \leq |\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{A}| + 1$.

Wir kommen zum Beweis von (2). Wir verbinden ihn zweckmäßig mit dem Beweis des folgenden Hilfssatzes:

(5) Sei $\mathfrak{E} \in \mathfrak{s} \mathfrak{G}$, $\mathfrak{E}$ einfach und nichtabelsch. Dann ist die normale Hülle $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ von $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{G}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$.

Den Beweis von (2) und (5) führen wir gemeinsam durch Induktion bezüglich $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$. Für $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}| = 0$ ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$, also ist $\mathfrak{G}$ einfach und beide Sätze sind trivialerweise richtig. Weiter sei $|\mathfrak{G} - \mathfrak{E}| > 0$, also $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$. Unter den in (2) und (5) gemachten Voraussetzungen behaupten wir der Reihe nach:

(α) Ist $G \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}^G \neq \mathfrak{E}$, so ist $\mathfrak{E} \circ \mathfrak{E}^G = 1$.

Nach (4) ist $|\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} - \mathfrak{E}| < |\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$. Nach Induktionsvoraussetzung kann (2) schon auf die drei Gruppen $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^G$ angewandt werden und liefert die Behauptung.

(β) $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ ist ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Mit anderen Worten: Ist $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist $1 \neq N \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$, so ist $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} \leq \mathfrak{N}$.

Nach Definition von $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}}$ liegt N im Erzeugnis von endlich vielen geeignet gewählten Konjugierten $\mathfrak{E}_\sigma$ von $\mathfrak{E}$. Dieses Erzeugnis ist nach (α) ein direktes Produkt. Bei passender Bezeichnung ist also

$$N = N_1 N_2 \dots N_r, \quad 1 \neq N_\varrho \in \mathfrak{E}_\varrho, \quad \mathfrak{E}_\varrho \circ \mathfrak{E}_\sigma = 1 \quad (\varrho \neq \sigma).$$

Für jedes $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ enthält $\mathfrak{N}$ den Kommutator $N \circ E_1 = N_1 \circ E_1$. Da $\mathfrak{E}_1$ einfach und nichtabelsch ist, erzeugen die Kommutatoren $N_1 \circ E_1$ ($E \in \mathfrak{E}_1$) die ganze Gruppe $\mathfrak{E}_1$. Daher haben wir $\mathfrak{E}_1 \leq \mathfrak{N}$ und wegen der Normalität von $\mathfrak{N}$ weiter $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{N}$, $\mathfrak{E}^{\mathfrak{G}} \leq \mathfrak{N}$.

(γ) Es ist $\mathfrak{A} \circ \mathfrak{E} = 1$. Zum Beweis bilden wir $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{E} = \mathfrak{H}$. Da $|\mathfrak{H} - \mathfrak{E}| \leq |\mathfrak{G} - \mathfrak{E}|$ ist, haben wir auch für $\mathfrak{H}$ statt $\mathfrak{G}$ das Ergebnis (β) zur Verfügung: $\mathfrak{E}^{\mathfrak{H}}$ ist ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{H}$. Daraus folgt $\mathfrak{A}^{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} = 1$. Denn sonst wäre $\mathfrak{E} \leq \mathfrak{E}^{\mathfrak{H}} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{H}}$; die letzte Gruppe stimmt aber wegen $\mathfrak{H} = \mathfrak{A} \cup \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ überein;

wir hätten also $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$, daher $\mathfrak{G} \leq \mathfrak{A}$ nach (3), entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{G} = 1$. Nun kommen wir ans Ziel: Es ist

$$\mathfrak{A} \circ \mathfrak{G} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \circ \mathfrak{G}^{\mathfrak{G}} \leq \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}} \cap \mathfrak{G}^{\mathfrak{G}} = 1.$$

Damit ist der Beweis von (2), (5) und (1a) beendet. Wir kommen zu (1b). Die Behauptung besagt: *Ist $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}$ und ist in $s\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung erfüllt, so ist $\mathfrak{N} \leq N\mathfrak{A}$ für jedes $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$.*

Wir führen den Beweis durch Induktion bezüglich $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$. Ist $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| = 0$, so ist $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{G} = \mathfrak{A} = N\mathfrak{A}$, also ist die Behauptung richtig. Weiter sei $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| > 0$; dann gehen wir von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{A}^{\mathfrak{G}}$ über. Wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ und der Normalität von $\mathfrak{G}_1$ ist $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1 = 1$ oder $= \mathfrak{N}$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{N} \circ \mathfrak{A} \leq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{G}_1 = 1$ und wir sind fertig. Im zweiten Fall haben wir $\mathfrak{N} \leq \mathfrak{G}_1$. Da wir in $s\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung vorausgesetzt haben, gibt es in $\mathfrak{N}$ einen minimalen Normalteiler $\mathfrak{N}_1$ von $\mathfrak{G}_1$, und in $s\mathfrak{N}_1$ ist wieder die Minimalbedingung erfüllt. Wählen wir nun $G \in \mathfrak{G}$ beliebig, so ist $\mathfrak{N}_1^G$ ein minimaler Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$, und nach (4) haben wir $|\mathfrak{G}_1 - \mathfrak{A}| < |\mathfrak{G} - \mathfrak{A}|$; also ist nach Induktionsvoraussetzung $\mathfrak{N}_1^G \leq N\mathfrak{A}$. Folglich gilt $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1^{\mathfrak{G}} \leq N\mathfrak{A}$, wie behauptet. Damit ist der Beweis von Satz 1 beendet.

Die Voraussetzung, daß $\mathfrak{N}$ ein minimaler Normalteiler und in $s\mathfrak{N}$ die Minimalbedingung erfüllt ist, hat übrigens zur Folge, daß $\mathfrak{N}$ das direkte Produkt von endlich vielen einfachen Gruppen ist (die überdies in $\mathfrak{G}$ konjugiert gewählt werden können). Man zeigt dies leicht mit Hilfe der Bemerkung, daß nach Satz 1 jedenfalls $Ns\mathfrak{N} \neq 1$, also wegen der Minimalität von $\mathfrak{N}$ genauer $Ns\mathfrak{N} = \mathfrak{N}$ ist.

Satz 1 gibt die Möglichkeit, zu der aufsteigenden Zentralreihe nilpotenter Gruppen ein Analogon in recht allgemeinen Fällen zu bilden:

(6) *Wenn für die subnormalen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ die Minimalbedingung und für die charakteristischen Untergruppen von $\mathfrak{G}$ die Maximalbedingung erfüllt ist (z.B.: wenn $\mathfrak{G}$ eine endliche Kompositionsreihe besitzt), dann führt die durch*

$$\mathfrak{N}_0 = 1, \quad \mathfrak{N}_{x+1}/\mathfrak{N}_x = Ns(\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_x)$$

erklärte aufsteigende Reihe charakteristischer Untergruppen in endlich vielen Schritten von 1 bis $\mathfrak{G}$: $1 = \mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1 < \dots < \mathfrak{N}_k = \mathfrak{G}$.

Für jedes $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$ ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{N}_0 \leq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_1 \leq \dots \leq \mathfrak{A}\mathfrak{N}_k = \mathfrak{G}$ eine Normalkette; insbesondere ist $|\mathfrak{G} - \mathfrak{A}| \leq k$.

Beweis: Für $\mathfrak{G} = 1$ ist nichts zu beweisen. Ist $\mathfrak{G} \neq 1$, so enthält $\mathfrak{G}$ minimale Normalteiler, und Satz 1 ergibt $\mathfrak{N}_0 < \mathfrak{N}_1$. Ist $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{G}$, so gehen wir zu $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_1$ über und finden ebenso $\mathfrak{N}_1 < \mathfrak{N}_2$, usw.; wegen der Maximalbedingung bricht das Verfahren ab, d.h. $\mathfrak{G}$ wird erreicht. Ist ferner $\mathfrak{A} \in s\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}$ auch mod $\mathfrak{N}_x$ subnormal, also normal unter $\mathfrak{N}_{x+1}$; daher ist $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_x$ normal in $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_{x+1}$.

Tübingen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 6. Mai 1958)

Corps maximaux et complets par des valuations de Krull

Par

P. RIBENBOIM*

Cet article se place dans notre programme d'étude systématique des corps munis de valuations de KRULL, c'est-à-dire, ayant rang quelconque. Dans cette ligne nous avons déjà publié le travail intitulé «Le Théorème d'Approximation pour les Valuations de KRULL»¹⁾.

Nous étudions ici certaines questions relatives aux corps valués complets et maximaux. D'abord nous enregistrons plusieurs résultats faciles; par exemple, nous trouvons des conditions suffisantes et nécessaires pour que le corps valué soit complet ou maximal, moyennant des valuations obtenues par décomposition de la valuation donnée. Il résulte par induction (comme il était déjà connu pour le rang fini), que tout corps valué discret complet de rang bien ordonné est maximal. Nous examinons aussi une notion de corps faiblement maximal et donnons le rapport entre cette notion et celle de corps maximal.

Notre principal résultat est une caractérisation des corps valués complets. Comme il est bien connu, un corps valué K est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de K admet une pseudo-limite dans K . Nous définissons alors les suites pseudo-convergentes *distinguées*, comme étant les suites pseudo-convergentes $(a_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments $a_\tau \in A$ (anneau de la valuation) qui possèdent largeur égale à un idéal premier non maximal de A . Le théorème obtenu affirme qu'un corps valué est complet si et seulement si toute suite pseudo-convergente distinguée du corps possède une pseudo-limite dans ce corps.

Nous terminons en généralisant un résultat de F. K. SCHMIDT sur les corps poly-complets et nous donnons une démonstration d'un résultat indiqué incorrectement par SCHILLING dans un de ses articles.

1.

Nous conservons ici la terminologie et notations introduites dans notre précédent travail déjà cité. En particulier, nous utiliserons les théorèmes de composition et décomposition de valuations dont les énoncés y figurent.

Pour rendre plus facile la lecture et fixer la terminologie, nous rappellerons quelques définitions et résultats connus, en omettant les démonstrations.

*) Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil.

¹⁾ Math. Z. **68**, 1—18 (1957).

Définition. Soient K, K' deux corps munis respectivement des valuations w, w' , et supposons que $K \subseteq K'$. On dit que w' est un prolongement de w (ou w est la restriction de w') lorsque $w'(x) = w(x)$ pour tout $x \in K$. Alors $A' \cap K = A$, où A, A' désignent respectivement les anneaux des valuations w, w' .

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w et K' un surcorps de K muni de la valuation w' qui prolonge la valuation w de K . On dit que K' est une extension immédiate de K lorsque les corps des restes ainsi que les groupes de valuation de K et de K' coïncident.

Lemme 1. Soit K' , muni de w' , une extension de K , muni de w , de façon que ces valuations possèdent le même rang, donc ses sous-groupes isolés se correspondent biunivoquement. Alors il existe une correspondance biunivoque entre les idéaux premiers de l'anneau A' de la valuation w' et les idéaux premiers de l'anneau A de la valuation w . Précisément, $\mathfrak{p}'$ et $\mathfrak{p}$ se correspondent lorsqu'ils correspondent biunivoquement à des sous-groupes isolés correspondants des groupes des valeurs de w et w' ; alors, on a $\mathfrak{p}' \cap A = \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ est l'idéal premier de A' engendré par $\mathfrak{p}$; en outre, la valuation $w'_{\mathfrak{p}'}$ prolonge à K' la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ de K . En particulier les hypothèses de ce lemme se vérifient lorsque K' , muni de w' , est une extension immédiate de K , muni de w .

Définition. Un corps K , muni de la valuation w , est dit maximal (relativement à w) lorsqu'il ne possède aucune extension immédiate distincte de K lui-même.

Le résultat suivant est fondamental:

Théorème 1. *Tout corps valué K (muni de w) possède une extension immédiate $\hat{K}$ (munie de $\hat{w}$) qui est un corps maximal.*

En utilisant les notions de suites pseudo-convergentes, de pseudo-limite d'une suite pseudo-convergente, on peut caractériser les corps valués maximaux [SCHILLING²⁾].

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w , soit $T = \{1, 2, \dots, \tau, \dots\}$ un ensemble bien ordonné d'indices, sans dernier élément, et $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite d'éléments de K . On dit que $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente (selon w) lorsqu'on a $w(a_\tau - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''})$ quand $\tau < \tau' < \tau''$ dans T .

Notons $\gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Gamma$ (groupe de valeurs de w), où $\tau < \tau'$ dans T (remarquons que γ_τ ne dépend pas de τ'). Alors la suite $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ est strictement croissante dans Γ .

Lemme 2. Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K , selon w . Alors: i) ou bien $(w(a_\tau))_{\tau \in T}$ est une suite strictement croissante d'éléments de Γ , ii) ou bien il existe un indice $\tau_0 \in T$ tel que

$$w(a_1) < w(a_2) < \dots < w(a_{\tau_0}) \geq w(a_{\tau_0+1}) = \dots = w(a_\tau) = \dots$$

et on a $w(a_{\tau'}) < w(a_\tau)$ lorsque $\tau' < \tau_0 < \tau$ dans T .

Remarquons que si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est pseudo-convergente alors $a_\tau \neq 0$ sauf éventuellement pour l'indice $\tau_0 \in T$. Si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente

²⁾ SCHILLING, F.: Valuation Theory. Amer. Math. Soc. (1950).

et si $a \in K$, $w(a) < w(a_1)$ lorsque $\tau_0 \neq 1$, ou $w(a) < w(a_2)$ lorsque $\tau_0 = 1$, alors $(a^{-1} \cdot a_\tau)_{\tau \in T}$ est aussi une suite pseudo-convergente, avec $w(a^{-1} \cdot a_\tau) > 0$ quelque soit $\tau \in T$.

Remarquons aussi que si T' est un sous-ensemble cofinal de l'ensemble bien ordonné d'indices T , alors si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est pseudo-convergente, il en est de même de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$.

Définition. Soit K' , muni de w' , une extension immédiate de K , muni de w . Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de K (selon w). On dit que $a \in K'$ est une pseudo-limite (selon w') de (a_τ) lorsqu'on a $w'(a - a_\tau) = w(a_\tau - a_\tau) = \gamma_\tau$ ($\tau < \tau'$ dans T) pour tout $\tau \in T$.

Selon que $(a_\tau)_{\tau \in T}$ soit du type i) ou ii) indiqués au lemme 2, on a respectivement: i) $w(a_\tau) < w'(a)$ quelque soit $\tau \in T$, ii) $w(a_\tau) = w'(a)$ quelque soit $\tau \in T$, $\tau_0 < \tau$.

Il est clair que si T' est un sous-ensemble cofinal de T et si a est pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T}$ alors a est aussi pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ et vice-versa. Cela permettra de nous restreindre aux suites pseudo-convergentes du type i) ou bien celles du type ii) pour lesquelles $w(a_\tau)$ est constant.

Définition. Si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente d'éléments du corps K , muni de w , si K' , muni de w' , est une extension immédiate de K , muni de w , alors l'ensemble $\mathfrak{b} = \{x \in K' \mid w'(x) > \gamma_\tau = w(a_\tau - a_\tau) \text{ pour tout } \tau \in T, \tau < \tau'\}$ est un idéal fractionnaire de K' (relativement à l'anneau de la valuation w') appelé la *largeur* de $(a_\tau)_{\tau \in T}$ dans le corps K' .

Il est alors clair que si $a \in K'$ est pseudo-limite de la suite pseudo-convergente $(a_\tau)_{\tau \in T}$ alors $a + \mathfrak{b}$ est l'ensemble des pseudo-limites de cette suite qui appartiennent à K' . En particulier, une suite pseudo-convergente ayant largeur nulle possède au plus une seule pseudo-limite.

Lemme 3. Soit K' , muni de la valuation w' , une extension immédiate du corps K , muni de la valuation w . Alors, tout élément a' de K' n'appartenant pas à K , est pseudo-limite d'une suite pseudo-convergente d'éléments de K , qui ne possède pas de pseudo-limite dans K . En particulier, si $a' \in A'$ (anneau de la valuation w') alors on peut choisir une suite pseudo-convergente dont les éléments sont dans l'anneau A de la valuation w .

Lemme 4. Si K est un corps muni de la valuation w , si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente d'éléments de K n'ayant pas de pseudo-limite dans K , il est possible de construire une extension immédiate $K(a)$ de K (munie d'une valuation w') telle que a soit une pseudo-limite de (a_τ) selon w' .

Théorème 2. *Un corps K , muni de la valuation w , est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de K admet au moins une pseudo-limite dans K .*

En vertu de la remarque qui suit le lemme 2, le théorème 2 admet l'énoncé équivalent suivant:

Théorème 2'. *Un corps K , muni de la valuation w , est maximal si et seulement si toute suite pseudo-convergente d'éléments de l'anneau A de la valuation w possède au moins une pseudo-limite dans A .*

Il est utile de remarquer qu'on ne connaît pas des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux extensions immédiates maximales d'un corps valué K soient isomorphes en tant que corps valués [cf. KAPLANSKY³⁾ et MACLANE⁴⁾].

Le résultat suivant sera utile dans un travail postérieur:

Lemme 5. Soit K un corps valué (muni de w) et $\hat{K}$, muni de $\hat{w}$, une extension immédiate maximale de K . Si w_p est une valuation moins fine que w , il existe un corps $\hat{K}_p$ tel que $K \subseteq \hat{K}_p \subseteq \hat{K}$ et que, muni de la valuation induite par $\hat{w}_p$, il soit une extension immédiate maximale de K , muni de w_p (où $\hat{p}$ est l'idéal premier de l'anneau de la valuation $\hat{w}$ qui correspond biunivoquement à p par le lemme 1).

Démonstration. En effet, soit l'ensemble Φ des corps L , contenus dans $\hat{K}$, valués par la restriction de $\hat{w}_p$ et qui sont des extensions immédiates de K , muni de w_p . Φ n'est pas vide, car $K \in \Phi$, puisque w_p est la restriction de $\hat{w}_p$ (lemme 1). Puisque Φ est inductif, par le théorème de ZORN il existe un élément maximal $L \in \Phi$, donc L , muni de la restriction de $\hat{w}_p$, est une extension immédiate de K , muni de w_p .

Montrons que le corps valué L est maximal par la valuation induite par $\hat{w}_p$. Sinon, par le théorème 2, il existerait une suite $(a_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments de L , pseudo-convergente selon $\hat{w}_p$ et sans pseudo-limite dans L . On peut prendre sans perte de généralité une suite (a_τ) telle qu'on ait $\hat{w}_p(a_\tau) > 0$ pour tout indice $\tau \in T$, en vertu du lemme 2. De l'hypothèse, il résulte que (a_τ) est pseudo-convergente selon $\hat{w}$ et alors il existe une pseudo-limite $a \in \hat{K}$ de (a_τ) selon $\hat{w}$; donc a est aussi pseudo-limite de (a_τ) selon $\hat{w}_p$, et ainsi $a \notin L$; or, $a \equiv a_\tau \pmod{\hat{p}}$ car on a $\hat{w}_p(a - a_\tau) = \hat{w}_p(a_\tau - a_\tau) > 0$ (lorsque $\tau < \tau'$), donc $\hat{w}(a - a_\tau) \notin \Delta$ (sous-groupe isolé correspondant à l'idéal premier $\hat{p}$). Or, cela entraîne que tout élément de $L(a) \cap \hat{A}_p$ est congru modulo $\hat{p}$ à un élément de $L \cap \hat{A}_p$. En effet, tout élément du type $f(a)$ (où f est un polynôme à coefficients dans $L \cap \hat{A}_p$) est congru à un élément de $L \cap \hat{A}_p$, modulo $\hat{p}$; si on prend maintenant un élément du type $f(a)/g(a) \in L(a) \cap \hat{A}_p$, si φ est l'homomorphisme canonique de $\hat{A}_p$ sur $\hat{A}_p/\hat{p}$, alors $\varphi(f(a))$, $\varphi(g(a))$ appartiennent au corps des restes de $L \cap \hat{A}_p$, donc aussi $\varphi(f(a)/g(a)) = \varphi(f(a))/\varphi(g(a))$. Il résulte que $L(a)$, muni de la restriction de $\hat{w}_p$ possède le même corps des restes que L , muni de la restriction de $\hat{w}_p$. Donc $L(a)$ est une extension immédiate de K , c'est-à-dire, $L(a) \in \Phi$, absurde!

Corollaire. Si K est un corps valué muni de w , et si $(0) \subseteq p \subseteq p' \subseteq p^0$ sont des idéaux premiers de l'anneau de valuation de w , où p^0 est l'idéal maximal, alors il existe des extensions immédiates maximales de K , à savoir $\hat{K}_p$ (munie de la restriction de $\hat{w}_p$), $\hat{K}_{p'}$ (munie de la restriction de $\hat{w}_{p'}$) telles que $K = \hat{K}_{(0)} \subseteq \hat{K}_p \subseteq \hat{K}_{p'} \subseteq \hat{K}_{p^0} = \hat{K}$.

³⁾ KAPLANSKY, I.: Maximal Fields with Valuations, I. Duke Math. J. 9, 303—321 (1942)

⁴⁾ MACLANE, S.: The Uniqueness of Power Series Representations of certain Fields with Valuations. Ann. of Math. 39, 370—382 (1938).

Lemme 6. Si K , muni de w , est un corps maximal, alors pour tout couple $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$, d'idéaux premiers de A , $(0) \subseteq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}' \subseteq \mathfrak{p}^0$, le corps $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$ est un corps valué maximal; en particulier, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A , le corps K muni de la valuation $w_{\mathfrak{p}}$ est maximal.

Démonstration. En effet, soit $(b_{\tau})_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de $\mathcal{K}$, relativement à la valuation $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$; donc, si $\tau < \tau' < \tau''$ alors $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}(b_{\tau} - b_{\tau'}) < w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}(b_{\tau'} - b_{\tau''})$. Si $a_{\tau} \in A_{\mathfrak{p}}$ désigne un représentant de la classe $b_{\tau} \bmod \mathfrak{p}$, alors d'après le théorème 2 de notre travail cité en (1), on a $\Theta(w(a_{\tau} - a_{\tau'})) < \Theta(w(a_{\tau'} - a_{\tau''}))$ où Θ est l'homomorphisme canonique de Δ sur Δ/Δ' . Il résulte que $w(a_{\tau} - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''})$ et (a_{τ}) est une suite pseudo-convergente d'éléments de K relativement à la valuation w . Par le théorème 2 il existe une pseudo-limite $a \in K$ de la suite ci-dessus et ainsi $w(a - a_{\tau}) = w(a_{\tau} - a_{\tau'})$, donc $\Theta(w(a - a_{\tau})) = \Theta(w(a_{\tau} - a_{\tau'}))$. Or, de $(a - a_{\tau})/(a_{\tau} - a_{\tau'}) \in A$, $a_{\tau} - a_{\tau'} \in A_{\mathfrak{p}}$ il vient $a - a_{\tau} \in A_{\mathfrak{p}}$, donc $a \in A_{\mathfrak{p}}$; ainsi, nous pouvons écrire $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}(b - b_{\tau}) = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}(b_{\tau} - b_{\tau'})$ lorsque $\tau < \tau'$ et alors $b \in \mathcal{K}$ est une pseudo-limite de la suite pseudo-convergente (b_{τ}) . Cela montre que $\mathcal{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'}$, est un corps maximal.

Le lemme précédent admet la réciproque suivante:

Lemme 7. Soit K un corps muni de la valuation w et supposons qu'il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de la valuation w tel que: 1) K , muni de $w_{\mathfrak{p}}$, est maximal; 2) $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, muni de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$ est maximal. Alors, K , muni de w , est un corps maximal.

Démonstration. En effet, supposons que K' , muni de w' , soit une extension immédiate de K , muni de w ; soit $\mathfrak{p}'$ (resp. $\mathfrak{p}'^0$) l'idéal premier de A' (anneau de la valuation w') qui correspond biunivoquement à l'idéal premier $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}^0$) de A , et de même $\mathcal{K}' = A'_{\mathfrak{p}'}/\mathfrak{p}'$, $\mathcal{K}'^0 = A'_{\mathfrak{p}'^0}/\mathfrak{p}'^0$; alors $\mathcal{K}'^0 = \mathcal{K}^0$. Si on avait $\mathcal{K} \subset \mathcal{K}'$ alors $\mathcal{K}'$, muni de $w'_{\mathfrak{p}', \mathfrak{p}'^0}$ serait une extension immédiate de $\mathcal{K}$, muni de $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{K} = \mathcal{K}'$ et alors K' , muni de $w'_{\mathfrak{p}'}$ serait une extension immédiate de K , muni de $w_{\mathfrak{p}}$, donc $K' = K$.

2.

En examinant la définition de corps maximal K (relativement à une valuation w), nous remarquons qu'il n'est question que d'une condition relative au groupe de valuation Γ et au corps des restes $\mathcal{K}^0$, défini par l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$ de la valuation w .

Il serait intéressant d'introduire une notion de maximalité qui prenne en considération aussi les autres idéaux premiers de l'anneau de la valuation. Ainsi, soit K un corps, muni de la valuation w , et soit $\mathfrak{p}_0$ un idéal premier non nul de l'anneau A de la valuation w .

Définition. Un corps K' , muni de la valuation w' , est une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ du corps K , muni de la valuation w , lorsque K' est une extension du corps K , w' prolonge w , les groupes des valeurs Γ' de w' et Γ de w coïncident et enfin, pour tout couple $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ d'idéaux premiers correspondants des anneaux A, A' des valuations w, w' , tels que $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}' \supseteq \mathfrak{p}'_0$ (où $\mathfrak{p}'_0$ correspond à $\mathfrak{p}_0$) les corps $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$ coïncident.

Ainsi, K' , muni de w' , est extension immédiate de K , muni de w (au sens usuel) exactement lorsque il l'est de classe $\mathfrak{p}^0$ (idéal maximal de l'anneau de la valuation w). Si $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1$ et si K' , muni de w' , est extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K , muni de w , alors il l'est aussi de classe $\mathfrak{p}_1$.

Définition. Un corps K , muni de la valuation w , est dit un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, lorsque il n'admet aucune extension immédiate K' de classe $\mathfrak{p}_0$, telle que $K \neq K'$.

Ainsi, K , muni de w , est un corps maximal (au sens usuel) exactement lorsque il l'est de classe $\mathfrak{p}^0$. Si $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1$ et si K , muni de w , est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_1$, alors il l'est aussi de classe $\mathfrak{p}_0$.

Lemme 8. K , muni de la valuation w , est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, si et seulement si K , muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est un corps maximal (au sens usuel).

Démonstration. En effet, si K' , muni de v' , est une extension immédiate de K , muni de $v = w_{\mathfrak{p}_0}$, alors $\mathcal{K}'_0 = A_{\mathfrak{p}_0}/\mathfrak{p}_0 = \mathcal{K}'_0$ (corps des restes de K' , muni de v'). Sur le corps K_0 soit la valuation $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$ dont le corps des restes est $\mathcal{K}^0 = A/\mathfrak{p}^0$. La valuation de K composée de $v = w_{\mathfrak{p}_0}$ et de $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$ (d'après le théorème des valuations composées) est égale à w . D'autre part, la valuation de K' , composée de v' et de $w_{\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}^0}$, est une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K , muni de w , donc $K' = K$ et alors K , muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est un corps maximal au sens usuel. Réciproquement, soit K' , muni de w' , une extension immédiate de classe $\mathfrak{p}_0$ de K , muni de w . Donc, on a $\mathcal{K}'_0 = A_{\mathfrak{p}_0}/\mathfrak{p}_0 = \mathcal{K}'_0 = A'_{\mathfrak{p}'_0}/\mathfrak{p}'_0$ (où A' , $\mathfrak{p}'_0$, désignent l'anneau de la valuation w' et l'idéal premier de A' correspondant à $\mathfrak{p}_0$). Ainsi, K' , muni de $w'_{\mathfrak{p}'_0}$, est une extension immédiate (au sens usuel) de K , muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$. Donc $K' = K$ et K est un corps maximal de classe $\mathfrak{p}_0$.

Nous complétons ces considérations en introduisant la définition suivante.

Définition. Un corps K , muni d'une valuation w , est dit faiblement maximal lorsque il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}_0$ de l'anneau de valuation w tel que K est maximal de classe $\mathfrak{p}_0$.

De cette définition il résulte:

Lemme 9. Si l'anneau de la valuation w de K possède un idéal premier minimal $\mathfrak{p}_1$ (non nul) alors K , muni de w , est faiblement maximal si et seulement si K , muni de $w_{\mathfrak{p}_1}$, est maximal (au sens usuel).

Démonstration. En effet, si K , muni de w , est faiblement maximal, il existe $\mathfrak{p}_0$, tel que K , muni de w , est maximal de classe $\mathfrak{p}_0$, c.a.d., d'après le lemme 8, K , muni de $w_{\mathfrak{p}_0}$, est maximal; donc, de $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_0$ il vient $w_{\mathfrak{p}_0} \geq w_{\mathfrak{p}_1}$ et par le lemme 6 K , muni de $w_{\mathfrak{p}_1}$, est maximal. La réciproque est triviale.

Remarque. Dans le cas où l'idéal nul de l'anneau de la valuation w du corps K est intersection d'idéaux premiers non nuls, il est possible de montrer l'existence d'un corps non faiblement maximal. Pour cela, soit Γ un groupe abélien additif totalement ordonné réunion d'une famille de sous-groupes isolés, $\Gamma = \bigcup \Delta_i$, où $\Gamma \neq \Delta_i$, et soit k un corps quelconque. Si K désigne le corps des fractions rationnelles à une indéterminée, coefficients dans k et exposants dans Γ , muni de la valuation w définie par $w(\sum a_\alpha X^\alpha) = \min \{\alpha \in \Gamma | a_\alpha \neq 0\}$, alors K n'est pas faiblement maximal. En effet, si $\mathfrak{p}$ est

un idéal premier non nul de l'anneau A de la valuation w , alors il est clair que K , muni de la valuation w_p , n'est pas maximal.

3.

Définition. Un corps K , muni de la valuation w , est dit complet (relativement à w) lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées:

c1) si $(0) \subseteq p_1 < p_2$ sont deux idéaux premiers successifs de l'anneau A de la valuation w , alors le corps $\mathcal{K}_1 = A_{p_1}/p_1$, muni de la valuation de rang 1 w_{p_1, p_2} est complet (par rapport à la topologie définie par cette valuation)

c2) si $(p_\tau)_{\tau \in T}$ est une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de A , si pour tout $\tau \in T$, $a_\tau \in A$ et $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supseteq p_{\tau'}$, alors il existe $x \in A$ tel que $x \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ pour tout p_τ .

La condition c2) est trivialement vérifiée lorsque l'anneau A ne possède pas d'idéal premier limite, par exemple, lorsque w est de rang fini. Remarquons à ce propos qu'on peut avoir une valuation w , dont le rang n'est pas fini et dont l'anneau de valuation ne possède aucun idéal premier limite, et dans ce cas le rang n'est pas bien ordonné [cf. RIBENBOIM⁵⁾].

Lemme 10. Tout corps valué maximal est complet.

Lemme 11. Soit K , muni de la valuation w , un corps complet. Alors pour tout idéal premier p de l'anneau de la valuation w , le corps K muni de la valuation w_p est complet.

Démonstration. Soit p un idéal premier de l'anneau A et montrons que K , muni de la valuation w_p , est complet.

c1) Soient les idéaux premiers successifs p_1, p_2 , de A_p , $(0) \subseteq p_1 < p_2 \subseteq p$, et soit $\mathcal{K}_1 = A_{p_1}/p_1$; si on pose $v = w_p$ alors on a $v_{p_1, p_2} = w_{p_1, p_2}$, donc par l'hypothèse sur w , la condition c1) est vérifiée par la valuation w_p .

c2) Soit $(p_\tau)_{\tau \in T}$ une famille (totalement ordonnée) décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de A contenus dans p , et pour tout $\tau \in T$ soit $a_\tau \in A_p$ de façon que $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supseteq p_{\tau'}$. Si Δ désigne le sous-groupe isolé de Γ (groupe de la valuation w) qui correspond à p , et de même Δ_τ celui qui correspond à p_τ (pour tout $\tau \in T$), alors on a $\Delta \subseteq \Delta_1 < \Delta_2 < \dots < \Delta_\tau < \dots$, $w(a_\tau) \in \Delta + \Gamma^r$ (pour $\tau \in T$). S'il existe un indice $\tau \in T$ tel que $w(a_\tau) < 0$ alors de $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ il vient $w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_\tau$, donc de $\Delta \subseteq \Delta_\tau$ il résulte que $w(a_\tau - a_{\tau'}) \geq 0$ et alors $w(a_{\tau'}) = w(a_\tau)$ lorsque $\tau < \tau'$ dans T . Ceci entraîne l'existence d'un élément $a \in A$, $a \notin p$, tel que $w(a \cdot a_\tau) \geq 0$ pour tout $\tau \in T$. Puisque on a $a \cdot a_\tau \equiv a \cdot a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supseteq p_{\tau'}$, avec $a \cdot a_\tau \in A$ pour tout $\tau \in T$, il résulte de l'hypothèse l'existence de $x \in A$ tel que $x \equiv a \cdot a_\tau \pmod{p_\tau}$ pour tout $\tau \in T$. Donc $a(xa^{-1} - a_\tau) = x - aa_\tau \in p_\tau$, où $a \in A$, $a \notin p$, donc $a \notin p_\tau$ et ainsi de $xa^{-1} - a_\tau \in A_p$ il vient $xa^{-1} - a_\tau \in p_\tau$. Donc $xa^{-1} \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ pour tout $\tau \in T$, avec $xa^{-1} \in A_p$. Cela démontre la condition c2).

Lemme 12. Si le corps K , muni de la valuation w est complet, et si p, p' , sont des idéaux premiers de l'anneau de la valuation w , $(0) \subseteq p < p' \subseteq p^0$, alors le corps $\mathcal{K} = A_p/p$, muni de la valuation $w_{p, p'}$, est complet.

⁵⁾ RIBENBOIM, P.: Sur les Groupes Totalement Ordonnés et l'Arithmétique des Anneaux de Valuation. À paraître dans Summa Bras. Math.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mathcal{K}$, muni de w_{p, p^0} est complet, car $w_{p, p'}$ étant une valuation moins fine que w_{p, p^0} , il résultera du lemme 11 que $\mathcal{K}$, muni de $w_{p, p'}$ est aussi complet.

c1) Soient $q_1 < q_2$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau A/p de la valuation $v = w_{p, p^0}$ de $\mathcal{K}$, donc $q_1 = p_1/p$, $q_2 = p_2/p$, avec $p \leq p_1 < p_2 \leq p^0$, p_1 et p_2 idéaux premiers successifs de A . Par l'hypothèse, $\mathcal{K}_1 = A_{p_1}/p_1$ est complet selon la valuation de rang 1 w_{p_1, p_2} , ayant anneau A_{p_2}/p_1 . Or, par le corollaire au théorème 2 de notre précédent travail on a $v_{q_1, q_2} = w_{p_1, p_2}$, donc la condition c1) est vérifiée par la valuation w_{p, p^0} .

c2) Considérons une suite totalement ordonnée décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers p_τ/p de l'anneau $B = A/p$ de la valuation $v = w_{p, p^0}$ de $\mathcal{K}$ (où nécessairement $p \leq p_\tau \leq p^0$). Soit (b_τ) une famille d'éléments de B , telle que $b_\tau \equiv b_{\tau'} \pmod{p_\tau/p}$ lorsque $p_\tau \geq p_{\tau'}$; montrons l'existence de $y \in B$ tel que $y \equiv b_\tau \pmod{p_\tau/p}$ pour tout p_τ . On a $b_\tau = \bar{a}_\tau$ (classe mod. p) où $a_\tau \in A$, donc $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ et il existe par hypothèse un élément $x \in A$ tel que $x \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ pour tout p_τ , donc si $y = \bar{x}$ (classe mod. p) alors $y \in B$, $y \equiv b_\tau \pmod{p_\tau/p}$, et ainsi la condition c2) est vérifiée par la valuation w_{p, p^0} .

Le résultat suivant est analogue au lemme 7:

Lemme 13. Soit K un corps muni de la valuation w et supposons qu'il existe un idéal premier non nul p de l'anneau A de la valuation w tel que: 1) K , muni de w_p , est complet; 2) $\mathcal{K} = A_p/p$, muni de w_{p, p^0} , est complet. Alors, K , muni de w , est complet.

Démonstration. En effet, vérifions les conditions c1) et c2)

c1) Soient p_1, p_2 deux idéaux premiers successifs de l'anneau A , $(0) \leq p_1 < p_2 \leq p^0$. Ou bien on a $p_1 < p_2 \leq p$ et alors $\mathcal{K}_1 = A_{p_1}/p_1$, muni de $w_{p_1, p_2} = (w_p)_{p_1, p_2}$ est complet d'après 1); ou bien on a $p \leq p_1 < p_2$ et alors si $v = w_{p, p^0}$, $q_1 = p_1/p$, $q_2 = p_2/p$, le corps $K_1 = A_{p_1}/p_1$, muni de $v_{q_1, q_2} = w_{p_1, p_2}$ est complet, d'après 2).

c2) Soit (p_τ) une famille totalement ordonnée décroissante bien ordonnée d'idéaux premiers de l'anneau A , soient $a_\tau \in A$ et $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \geq p_{\tau'}$, un système compatible de congruences. Si l'ensemble $P = \{p_\tau \mid p_\tau \leq p\}$ n'est pas vide, le système de congruences $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \leq p_{\tau'} \leq p$ admet une solution $x \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \in P$, en vertu de 1); alors si $p_\tau \notin P$ et $p_{\tau'} \in P$ on a $x - a_{\tau'} = (x - a_\tau) + (a_\tau - a_{\tau'}) \in p_\tau + p_{\tau'} = p_{\tau'}$, donc x est une solution du système de congruences. Si par contre l'ensemble P est vide, alors (q_τ) , où $q_\tau = p_\tau/p$, est une famille totalement ordonnée bien ordonnée décroissante d'idéaux premiers de l'anneau A/p de la valuation $v = w_{p, p^0}$ de $\mathcal{K} = A_p/p$, et le système de congruences $\bar{a}_\tau \equiv \bar{a}_{\tau'} \pmod{q_\tau}$ lorsque $p_{\tau'} \leq p_\tau$ (où $\bar{a}_\tau \in A/p$ est la classe modulo p de $a_\tau \in A$) est compatible, donc par 2) il admet une solution $\bar{x} \equiv \bar{a}_\tau \pmod{q_\tau}$ et alors $x \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ car $p < p_\tau$.

Nous allons maintenant considérer de plus près les relations qui existent entre les corps complets et maximaux. Pour cela nous définirons la notion de suite pseudo-convergente distinguée.

Définition. Soit K un corps muni de la valuation w . On dit que la suite pseudo-convergente $(a_\tau)_{\tau \in T}$ d'éléments de K est *distinguée* lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites: i) $a_\tau \in A$ pour tout $\tau \in T$; ii) la largeur de $(a_\tau)_{\tau \in T}$ dans le corps K est un idéal premier distinct de l'idéal maximal de l'anneau A .

Dans le cas où la valuation w possède rang 1, nous pouvons faire les considérations suivantes, fondées sur l'existence de base dénombrable de voisinages pour le groupe des valeurs de w (considère comme sous-groupe de celui des nombres réels). Si $(a_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente, soit γ (réel ou infini) la borne supérieure de l'ensemble $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$. Soit $\gamma'_1 < \gamma'_2 < \dots < \gamma'_n < \dots$ une suite ordinaire (c'est-à-dire, dont l'ensemble d'indices possède type d'ordre ω) de nombres réels qui converge vers γ . Soit $\tau_1 \in T$ le plus petit des indices tels que $\gamma'_1 < \gamma_{\tau_1}$, soit n_1 le plus petit entier tel que $\gamma_{\tau_1} < \gamma'_{n_1}$, et posons $\gamma''_2 = \gamma'_{n_1}$; de même, soit $\tau_2 \in T$ le plus petit des indices tels que $\gamma''_2 < \gamma_{\tau_2}$, soit n_2 le plus petit entier tel que $\gamma_{\tau_2} < \gamma'_{n_2}$ et posons $\gamma''_3 = \gamma'_{n_2}$. En poursuivant indéfiniment, on obtient la suite ordinaire $\gamma_{\tau_1} < \gamma_{\tau_2} < \dots < \gamma_{\tau_n} < \dots$ qui converge vers γ ; alors la suite ordinaire $(a_{\tau_n})_{n=1,2,\dots}$ est pseudo-convergente et ses pseudo-limités coïncident avec ceux de la suite $(a_\tau)_{\tau \in T}$, et ainsi elles ont la même largeur. Remarquons que lorsque $(a_\tau)_{\tau \in T}$ possède largeur nulle alors $(a_{\tau_n})_{n=1,2,\dots}$ est une suite de CAUCHY (relativement à la structure uniforme définie par la valuation de rang 1 w de K) et réciproquement.

Théorème 3. *Un corps K , muni de la valuation w , est complet si et seulement si toute suite pseudo-convergente distinguée dans K possède au moins une pseudo-limite dans K .*

Démonstration. Soit K , muni de w , un corps complet. Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente distinguée dans K , donc $a_\tau \in A$ pour tout $\tau \in T$ et sa largeur est un idéal premier $\mathfrak{p}$ distinct de l'idéal maximal $\mathfrak{p}^0$ de l'anneau A . Soit Δ le sous-groupe isolé de Γ qui correspond à $\mathfrak{p}$. Deux cas sont alors possibles.

Premier cas. Il existe $\mathfrak{p}_1$, idéal premier de A , successif à $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} < \mathfrak{p}_1$; soit Δ_1 le correspondant sous-groupe isolé, $\Delta_1 < \Delta$. Du fait que $\mathfrak{p}$ soit la largeur de (a_τ) il résulte que $w(a_\tau - a_{\tau'}) = \gamma_\tau \in \Delta$, $w(a_\tau) \in \Delta$ (en vertu de lemme 2), donc $a_\tau \notin \mathfrak{p}$, $a_\tau - a_{\tau'} \notin \mathfrak{p}$, quelques soient $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$.

Soit $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ et posons $w' = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$; notons $\mathfrak{p}'_1 = \mathfrak{p}_1/\mathfrak{p}$, donc K est complet par rapport à la valuation de rang 1 $w'_{\mathfrak{p}'_1} = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}$. Notons $\varphi: A_{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathcal{K}$ l'homomorphisme canonique et écrivons $\varphi(a_\tau) = b_\tau \in A/\mathfrak{p} \subseteq \mathcal{K}$ pour tout $\tau \in T$. En vertu du théorème 2 de notre travail cité en¹), il résulte que $w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_\tau - a_{\tau'}) = \gamma_\tau \in \Delta$, donc $(b_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente distinguée dans $\mathcal{K}$ (selon w') ayant largeur nulle; alors il existe un sous-ensemble d'indices $T' \subseteq T$, tel que $(b_\tau)_{\tau \in T'}$, soit une suite pseudo-convergente distinguée dans $\mathcal{K}$ selon la valuation moins fine $w'_{\mathfrak{p}'_1}$, et dont la largeur est nulle. Donc, par l'hypothèse il existe $y \in \mathcal{K}$, pseudo-limite (d'ailleurs unique) de $(b_\tau)_{\tau \in T'}$ selon $w'_{\mathfrak{p}'_1}$. Supposons maintenant que, dans une extension immédiate maximale $\widehat{\mathcal{K}}$ de $\mathcal{K}$ selon w' , l'élément $z \in \widehat{\mathcal{K}}$ soit une pseudo-limite (d'ailleurs unique) de

$(b_\tau)_{\tau \in T}$ selon w' ; alors $z \in \hat{\mathcal{K}}$ est aussi pseudo-limite de $(b_\tau)_{\tau \in T'}$ selon w'_{p_1} et puisque cette suite possède largeur nulle, alors $z = y \in \mathcal{K}$; cela montre d'après le théorème 2 que $y \in \mathcal{K}$ est pseudo-limite de $(b_\tau)_{\tau \in T}$ selon w' . Prenons maintenant $x \in A_p$ tel que $\varphi(x) = y$. Si $y = 0$ alors $x \in p$ donc $w(x) \notin \Delta$ et $w(x - a_\tau) = w(a_\tau) = w'(b_\tau) = w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_\tau - a_{\tau'})$ par le lemme 2, quelques soient $\tau, \tau' \in T, \tau < \tau'$. Si par contre $y \neq 0$, alors on a de même, $w(x - a_\tau) = w(a_\tau - a_{\tau'})$ quelques soient $\tau, \tau' \in T, \tau < \tau'$ car $x - a_\tau \notin p$ quelque soit $\tau \in T$. Cela montre l'existence d'une pseudo-limite $x \in K$ de la suite pseudo-convergente distinguée donnée $(a_\tau)_{\tau \in T}$.

Second cas. p est un idéal premier limite, c'est-à-dire il existe une suite bien ordonnée strictement décroissante $(p_\sigma)_{\sigma \in S}$ d'idéaux premiers de A tels que $p \neq p_\sigma, p = \bigcap_{\sigma \in S} p_\sigma$. Notons Δ_σ le sous-groupe isolé correspondant à p_σ , donc $\Delta = \bigcup_{\sigma \in S} \Delta_\sigma, \Delta \neq \Delta_\sigma$.

Pour tout $\sigma \in S$ soit $T(\sigma) = \{\tau \in T \mid \gamma_\tau \in \Delta_{\sigma+1}, \gamma_\tau \notin \Delta_\sigma\}$. Alors si $\sigma < \sigma'$ dans S il résulte que $\tau < \tau'$ dans T , lorsque $\tau \in T(\sigma), \tau' \in T(\sigma')$. Soit $S' = \{\sigma \in S \mid T(\sigma) \neq \emptyset\}$; alors $T = \bigcup_{\sigma \in S'} T(\sigma)$. De même, il est clair que S' est cofinal dans S , donc si $\tau(\sigma)$ est le premier élément de $T(\sigma)$ lorsque $\sigma \in S'$ il résulte que $T' = \{\tau(\sigma) \mid \sigma \in S'\}$ est cofinal dans T (car S' n'a pas un dernier élément). En outre les ensembles bien ordonnés T' et S' sont isomorphes et peuvent être identifiés. Cela signifie qu'on peut considérer un sous-ensemble cofinal T' de T et S , de façon que $w(a_\tau - a_{\tau'}) = \gamma_\tau \in \Delta_{\tau'}, \gamma_\tau \notin \Delta_\tau$, lorsque $\tau, \tau' \in T', \tau < \tau'$, où on a $p = \bigcap_{\tau \in T'} p_\tau$; donc on a le système compatible de congruences $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_\tau}$ lorsque $p_\tau \supseteq p_{\tau'} (\tau, \tau' \in T')$, avec $a_\tau \in A$ pour tout $\tau \in T'$.

Par l'hypothèse que K , muni de w est complet, il existe $x \in A$ tel que $x \equiv a_\tau \pmod{p_\tau}$ pour tout $\tau \in T'$. Puisque $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{p_{\tau'}}$ lorsque $\tau < \tau'$ alors $x \equiv a_\tau \pmod{p_{\tau'}}$ donc $w(x - a_\tau) \in \Delta_{\tau'}, w(x - a_{\tau'}) \notin \Delta_{\tau'}$ et alors $w(x - a_\tau) < w(x - a_{\tau'})$ lorsque $\tau < \tau'$. Cela entraîne que $\gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'}) = w[(x - a_\tau) - (x - a_{\tau'})] = w(x - a_\tau)$, donc x est une pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ dans K et par une remarque déjà faite, x est pseudo-limite de la suite $(a_\tau)_{\tau \in T}$.

Supposons réciproquement que toute suite pseudo-convergente distinguée dans K possède au moins une pseudo-limite dans K . Montrons que K est complet.

c1) Soient $p < p_1$ deux idéaux premiers successifs de l'anneau A de la valuation w de K , soient $\Delta > \Delta_1$ les correspondants sous-groupes isolés et montrons que $\mathcal{K} = A_p/p$, muni de la valuation de rang 1 $w' = w_{p, p_1}$ est complet.

Prenons d'abord une suite de CAUCHY $(b_n)_{n=1, 2, \dots}$ d'éléments de $A/p < \mathcal{K}$; on peut supposer sans perte de généralité que $b_n \neq 0$ et si $\gamma'_n = w_{p, p_1}(b_n - b_{n+1}) \in \Delta/\Delta_1$, alors $0 \leq \gamma'_1 < \gamma'_2 < \dots < \gamma'_n < \dots$; en outre (γ'_n) est cofinal à Δ/Δ_1 .

Soit, pour tout indice n , $a_n \in A$ tel que $\varphi(a_n) = b_n \neq 0$ donc $a_n \notin p$ et $a_n - a_{n'} \notin p$ lorsque $n < n'$; [si $a_n - a_{n'} \in p$ alors $b_n = b_{n'}$ et $\gamma'_n = w_{p, p_1}(b_n - b_{n'}) = \infty$ absurde!]. Alors la suite (a_n) est pseudo-convergente distinguée dans K , selon w , car $\Theta \circ w(a_n - a_{n'}) = w_{p, p_1}(b_n - b_{n'}) = \gamma'_n$, lorsque $n < n'$; donc si

$\gamma_n = w(a_n - a_{n'})$ alors (γ_n) est une suite strictement croissante et cofinale à Δ . Par l'hypothèse, il existe $x \in K$ qui soit pseudo-limite de (a_n) , donc $w(x - a_n) = w(a_n - a_{n'}) = \gamma_n$ (lorsque $n < n'$) donc $x \in \Delta$ car $\gamma_n \geq 0$, $w(a_n) \geq 0$.

Si $x \notin \mathfrak{p}$ alors $w(x - a_n) = w(a_n) = \gamma_n$, donc $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n) = \Theta \circ w(a_n) = \Theta(\gamma_n) = \Theta \circ w(a_n - a_{n'}) = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n - b_{n'}) = \gamma'_n$ et ainsi 0 est limite de la suite de Cauchy donnée.

Si $x \notin \mathfrak{p}$ et si $y = \varphi(x)$ alors $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(y - b_n) = \Theta \circ w(x - a_n) = \Theta \circ w(a_n - a_{n'}) = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}(b_n - b_{n'}) = \gamma'_n$ donc y est la limite de la suite de Cauchy donnée.

Si la suite de CAUCHY (b_n) n'a pas tous ses éléments dans $\Delta/\mathfrak{p}$, comme (b_n) est aussi une suite pseudo-convergente ayant largeur nulle selon la valuation plus fine $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, par multiplication avec un élément $b \in \mathcal{K}$, $b \neq 0$, il est possible obtenir une suite de CAUCHY $(b \cdot b_n)$, selon $w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1}$, où $b \cdot b_n \in \Delta/\mathfrak{p}$. Alors si $y' \in \mathcal{K}$ est la limite de $(b \cdot b_n)$, il résulte que $y' \cdot b^{-1} = y$ est la limite de (b_n) .

c2) Soit $(\mathfrak{p}_\tau)_{\tau \in T}$ une famille bien ordonnée strictement décroissante d'idéaux premiers, telle que si $\mathfrak{p} = \bigcap_{\tau \in T} \mathfrak{p}_\tau$ alors $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\tau$ pour tout $\tau \in T$. Soit le système compatible de congruences $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ lorsque $\mathfrak{p}_\tau \supset \mathfrak{p}_{\tau'}$, où $a_\tau \in \Delta$, pour $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$.

Supposons d'abord qu'il existe un indice $\tau_0 \in T$ tel que $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ quelque soit $\tau \in T$. Dans ce cas, a_{τ_0} est solution du système de congruences. Ainsi, nous pouvons désormais supposer qu'il n'existe aucun tel indice τ_0 .

Il est alors facile de considérer un sous-ensemble T' cofinal à T , de façon que $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$, $a_\tau \not\equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$ lorsque $\tau, \tau' \in T'$, $\tau < \tau'$ [voir SCHILLING²⁾, p. 48, remarque 2]. Donc $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ est une suite pseudo-convergente distinguée car $w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Delta_\tau$, $w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_{\tau'}$ et $\Delta = \bigcup_{\tau \in T'} \Delta_\tau$ (où Δ_τ est le sous-groupe isolé correspondant à $\mathfrak{p}_\tau$). Par l'hypothèse, il existe $x \in K$ pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T'}$ donc $w(x - a_\tau) = w(a_\tau - a_{\tau'}) \notin \Delta_{\tau'}$, c'est-à-dire $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T'$. Alors on a aussi $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$ pour tout $\tau \in T$, car si $\tau \in T$ et si on prend $\tau' \in T'$, $\tau < \tau'$ (un tel τ' existe) alors $x \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_{\tau'}}$, $a_\tau \equiv a_{\tau'} \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$, $\mathfrak{p}_{\tau'} \subset \mathfrak{p}_\tau$, donc $x \equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}_\tau}$.

Remarque. Du théorème 2' et de ce qui nous venons de montrer, il résulte la validité du lemme 10.

La réciproque du lemme 10 n'est pas vraie en général; en effet, on connaît des exemples de corps valués complets mais non maximaux, même relativement à une valuation de rang 1. Cette valuation ne peut pas être discrète; car si K est un corps muni d'une valuation discrète de rang 1 par rapport à laquelle il est complet, alors il est aussi maximal. Le lemme suivant généralise cette dernière affirmation [cf. MACLANE⁴⁾].

Lemme 14. Soit K un corps muni d'une valuation discrète w de rang bien ordonné, par rapport à laquelle il est complet. Alors K , muni de w , est un corps maximal.

Démonstration. *Premier cas*: Il existe un idéal premier minimal $\mathfrak{p} \neq (0)$. Soit $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$ et $w' = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, donc le groupe de valeurs de w' est égal au sous-groupe isolé Δ de Γ qui correspond à $\mathfrak{p}$; ainsi, w' est discrète et possède rang

strictement inférieur à celui de w . Puisque K , muni de w , est complet, alors $\mathcal{K}$, muni de w' , est aussi complet; le lemme étant valable pour des valuations de rang 1, on déduit par induction que $\mathcal{K}$, muni de w' , est maximal. D'autre part, K , muni de la valuation w_p de rang 1 est discret et complet, donc aussi maximal. Par un résultat précédent, K , muni de w , est maximal.

Deuxième cas: l'idéal premier (0) est un idéal premier limite, c'est-à-dire, $\Gamma = \bigcup \Delta_2$ (où $\Delta_2 \neq \Gamma$ sont des sous-groupes isolés principaux). Soit $(a_\tau)_{\tau \in T}$ une suite pseudo-convergente d'éléments de l'anneau A de w et $\gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'})$ lorsque $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$. Si la suite strictement croissante $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ est cofinale à Γ , alors c'est une suite pseudo-convergente distinguée, donc il existe une pseudo-limite $a \in K$, car K , muni de w , est complet. Si, par contre, $(\gamma_\tau)_{\tau \in T}$ n'est pas cofinale à Γ , alors de $\Gamma = \bigcup \Delta_2$, $\Delta_2 \neq \Gamma$, il résulte qu'il existe un sous-groupe isolé $\Delta \neq \Gamma$ tel que $\gamma_\tau \in \Delta$ quelque soit $\tau \in T$. Soit $\mathfrak{p}$ l'idéal premier de l'anneau A qui correspond à Δ , donc $\mathfrak{p} \neq (0)$, et considérons le corps des restes $\mathcal{K} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}$, de K , muni de w . Pour tout $\tau \in T$ notons b_τ la classe de a_τ , modulo $\mathfrak{p}$; puisque $0 \leq w(a_\tau) \leq \gamma_\tau = w(a_\tau - a_{\tau'}) \in \Delta$ alors $a_\tau \notin \mathfrak{p}$, donc $b_\tau \neq 0$ quelque soit $\tau \in T$. Alors, si on note $w' = w_{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^0}$, on a $w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_\tau - a_{\tau'}) < w(a_{\tau'} - a_{\tau''}) = w'(b_{\tau'} - b_{\tau''})$, pour $\tau, \tau', \tau'' \in T$, $\tau < \tau' < \tau''$, donc $(b_\tau)_{\tau \in T}$ est une suite pseudo-convergente de $\mathcal{K}$, muni de la valuation discrète w' , dont le groupe des valeurs est Δ . Puisque $\mathcal{K}$, muni de w' , est un corps complet et le rang de Δ est strictement inférieur à celui de Γ , le lemme étant vrai pour les valuations de rang 1, on déduit par induction que $\mathcal{K}$, muni de w' , est un corps maximal; il existe alors au moins une pseudo-limite $b \in \mathcal{K}$ de $(b_\tau)_{\tau \in T}$, c'est-à-dire, $w'(b - b_\tau) = w'(b_\tau - b_{\tau'})$ lorsque $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$ (et nécessairement $b \neq b_\tau$). Soit $a \in A_{\mathfrak{p}} \subseteq K$, dont la classe modulo $\mathfrak{p}$ est égale à b ; alors $a \not\equiv a_\tau \pmod{\mathfrak{p}}$ quelque soit $\tau \in T$, donc $w(a - a_\tau) = w'(b - b_\tau) = w'(b_\tau - b_{\tau'}) = w(a_{\tau'} - a_\tau)$ (car $a_{\tau'} \not\equiv a_{\tau''} \pmod{\mathfrak{p}}$), pour $\tau, \tau' \in T$, $\tau < \tau'$, et ainsi $a \in K$ est une pseudo-limite de $(a_\tau)_{\tau \in T}$. Donc, K , muni de w , est un corps maximal.

4.

Le résultat suivant généralise aux valuations de rang fini un théorème de F. K. SCHMIDT⁶⁾, pour les valuations de rang 1.

Lemme 15. Supposons que le corps K soit complet relativement à une valuation discrète w ayant rang fini. Si w' est une valuation discrète de K de même rang que w , alors w' et w coïncident. De même, si K est complet par rapport à une valuation w' ayant même rang que w , alors w' et w coïncident.

Démonstration. Nous démontrerons le lemme par induction sur le rang de w , lequel est supposé fini. Remarquons que le lemme est vrai lorsque la valuation w possède rang 1. Supposons donc que le rang de w soit strictement supérieur à 1 et que le lemme soit vrai pour toute valuation ayant rang strictement inférieur à celui de w . Ainsi, il existe un idéal premier non nul $\mathfrak{p}$ de l'anneau A de la valuation w , tel que $(0) \subset \mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}^0$. Il

⁶⁾ SCHMIDT, F. K.: Mehrfach perfekte Körper. Math. Ann. 108, 1-25 (1933).

résulte du lemme 11 que K est complet par la valuation discrète w_p ; de même, par le lemme 12, $\mathcal{K} = A_p/p$ est complet par la valuation discrète w_{p,p^0} ; en plus, les valuations w_p et w_{p,p^0} ont rang strictement inférieur à celui de w . Soit maintenant w' une valuation de K ayant le même rang que w et notons p', p'^0 , les idéaux premiers de l'anneau A' de la valuation w' , correspondants par le lemme 1 respectivement aux idéaux p, p^0 . Si w' est discrète, alors w'_p est une valuation discrète de $\mathcal{K}$ ayant même rang que w_p , donc par induction, $w'_p = w_p$ c'est-à-dire, $A'_p = A_p$ et alors $p' = p$, donc $\mathcal{K}' = A'_p/p' = A_p/p = \mathcal{K}$. De même, w'_{p',p'^0} est une valuation discrète de $\mathcal{K}$ ayant le même rang que w_{p,p^0} , donc par induction, on déduit que $w'_{p',p'^0} = w_{p,p^0}$. Il résulte alors du théorème des valuations composées que $w' = w$.

Supposons maintenant que K soit complet par rapport à une valuation w' de même rang que w ; on démontre analogiquement que $w' = w$.

5.

Définition. Un corps K muni de la valuation w est dit Henselien (ou relativement complet) lorsqu'il vérifie le «lemme de HENSEL»:

Soit $f(X) \in A[X]$ un polynôme primitif (où A est l'anneau de la valuation w de K) et soit $f(X) \equiv g_0(X) \cdot h_0(X) \pmod{p^0}$ avec $g_0(X), h_0(X) \in A[X]$, premier coefficient de $g_0(X)$ égal à une unité de A et $\text{pgcd}(g_0(X), h_0(X)) \equiv 1 \pmod{p^0}$. Alors, il existe des polynômes $g(X), h(X) \in A[X]$ tels que $g(X) \equiv g_0(X), h(X) \equiv h_0(X) \pmod{p^0}$, $g(X)$ ayant le même degré que $g_0(X)$, et $f(X) = g(X) \cdot h(X)$.

Il est bien connu que tout corps valué complet est Henselien. NAGATA⁷⁾ démontre pour les corps valués Henseliens les résultats correspondants aux lemmes 11, 12 et 13.

Nous démontrerons ensuite un résultat indiqué incorrectement par SCHILLING⁸⁾ dans une forme particulière:

Lemme 16. Si le corps K est complet relativement à deux valuations distinctes ayant le même rang w, w' , telles que leurs anneaux de valuation ne possèdent aucun idéal premier limite (par exemple, lorsque ces valuations possèdent rang fini), alors K est algébriquement clos ou possède un corps des restes algébriquement clos.

Démonstration. Supposons que p soit le plus grand idéal premier (éventuellement nul) commun aux anneaux A, A' des valuation w, w' ; alors $w \wedge w' = w_p = w'_p$, donc $A_p = A'_p$. Le corps des restes de K , muni de w_p , est $\mathcal{K} = A_p/p = A'_p/p$. Dans le corps $\mathcal{K}$ considérons les valuations $v = w_{p,p^0}$ et $v' = w'_{p',p'^0}$ (où p^0, p'^0 sont resp. les idéaux maximaux de A, A'); alors, d'après le lemme 6, $\mathcal{K}$ est complet relativement à v, v' . D'autre part, il n'existe aucun idéal premier non nul commun aux anneaux $A/p, A'/p$ des valuations v, v' .

⁷⁾ NAGATA, M.: On the Theory of Henselian Rings. Nagoya Math. J. 5, 45—57 (1953).

⁸⁾ SCHILLING, F. G.: Arithmetic in Fields of Formal Power Series in several Variables. Ann. of Math. 38, 551—576 (1937), p. 555, theorem 1.

Si $q_1 = p_1/p$ et $q'_1 = p'_1/p$ sont respectivement les idéaux premiers minimaux de A/p , A'/p (dont l'existence découle de l'hypothèse sur le rang des valuations données) alors $\mathcal{K}$ est complet relativement aux valuations distinctes de rang 1 $v_{q_1} = w_{p, p_1}$ et $v'_{q'_1} = w'_{p, p'_1}$; alors par un résultat de F. K. SCHMIDT⁶⁾ $\mathcal{K}$ est algébriquement clos; en particulier, si $p = (0)$ on peut conclure que K est algébriquement clos.

Remarque. Si $\mathcal{K}$ est un corps algébriquement clos, muni de deux valuations (non discrètes) de rang 1, w'_1, w'_2 , par rapport auxquelles il est complet, si K est un corps non algébriquement clos, valué discret complet selon la valuation v , et ayant corps des restes $\mathcal{K}$, et enfin, si w'_1, w'_2 sont les valuations de K , plus fines que v et obtenues en composant v avec respectivement w'_1, w'_2 , alors w'_1 et w'_2 sont distinctes et K est complet relativement à ces valuations de même rang, en vertu du lemme 13. Il résulte qu'on ne peut pas affirmer dans le lemme 16 que K soit algébriquement clos.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brasil

(Eingegangen am 8. Februar 1958)

Einführung in die Atomphysik

Von **Wolfgang Finkelburg**, Honorarprofessor an der Universität Erlangen. Fünfte und sechste Auflage. Mit 266 Abbildungen. XI, 537 Seiten Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen DM 45.—

Inhaltsübersicht: Einleitung. — Allgemeines über Atome, Ionen, Elektronen, Atomkerne, Photonen. — Atomspektren und Atombau. — Die quantenmechanische Atomtheorie. — Die Physik der Atomkerne. — Physik der Moleküle. — Festkörper-Atomphysik. — Tabelle der für die Atomphysik wichtigsten Konstanten und Beziehungen. — Sachverzeichnis.

Aus dem Vorwort zur fünften und sechsten Auflage:

Wenn in den knapp zehn Jahren seit dem Erscheinen der ersten Auflage über 25 000 Exemplare dieses Buches gedruckt werden konnten, so spricht das wohl dafür, daß es für einen unerwartet großen Leserkreis den dem Autor vorschwebenden Zweck einer Einführung erfüllt. Auch für die neue Auflage wurde deshalb, trotz mancher Versuchungen und Anregungen zur Erweiterung und Vertiefung, am alten Aufbau festgehalten. Dagegen wurde der gesamte Text noch einmal kritisch durchgesehen, zahlreiche kleinere Verbesserungen angebracht und durch Kürzungen nicht nur Raum für die Einfügung vieler neuer Einzelergebnisse geschaffen, sondern der Umfang gegenüber den letzten Auflagen sogar leicht vermindert. Wesentliche Teile der Abschnitte über Kernreaktoren, Mesonen und Hyperonen, sowie die Supraleitung wurden dabei umgeschrieben, eine Diskussion der Antiteilchen eingefügt und insbesondere der Abschnitt über Astronukleonik, unter Berücksichtigung der neuen Ergebnisse über den Elementenaufbau in den Fixsternen, neu geschrieben. Ganz allgemein wurde das Buch, soweit das bei Erhaltung seines Charakters möglich schien, dem neuesten Stand der Forschung auch durch Revision sämtlicher Zahlenwerte angepaßt und das (für den Benutzer so wichtige) Sachverzeichnis überarbeitet.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete

Unter Mitwirkung der Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik“ herausgegeben von L. V. Ahlfors, R. Baer, R. Courant, J. L. Doob, S. Eilenberg, P. R. Halmos, M. Kneser, T. Nakayama, H. Rademacher, F. K. Schmidt, B. Segre, E. Sperner.

Neue Folge.

Heft 18:

Univalent Functions and Conformal Mapping

By James A. Jenkins. (Reihe: Moderne Funktionentheorie. Besorgt von L. V. Ahlfors.) With 6 Figures. VIII, 169 Seiten Gr.-8°. 1958. Steif geheftet DM 34.—

This monograph deals with the application of the method of the extremal metric to the theory of univalent functions. Apart from an introductory chapter in which a brief survey of the development of this theory is given there is therefore no attempt to follow up other methods of treatment. Nevertheless such is the power of the present method that it is possible to include the great majority of known results on univalent functions. It should be mentioned also that the discussion of the method of the extremal metric is directed toward its application to univalent functions, there being no space to present its numerous other applications, particularly to questions of quasiconformal mapping. Also it should be said that there has been no attempt to provide an exhaustive bibliography, reference normally being confined to those sources actually quoted in the text.

The central theme of our work is the General Coefficient Theorem which contains as special cases a great many of the known results on univalent functions. In a final chapter we give also a number of applications of the method of symmetrization.

Heft 20:

A Survey of Binary Systems

By Richard Hubert Bruker. (Reihe: Gruppentheorie. Besorgt von R. Baer.) VIII, 185 Seiten Gr.-8°. 1958. Steif geheftet DM 36.—

The area of mathematics surveyed by the present report might be described as a little too broad to be treated in an encyclopedic manner in a reasonable space and yet not sufficiently developed in all its parts to warrant several distinct reports. Group theory and lattice theory are both regarded as outside the scope of the report. Subject to this restriction, the area surveyed is the algebraic theory of systems with a single binary operation. The operation is understood to be single-valued except in the case of multi-groups and allied systems. Since quasigroups, for example, can be studied either in terms of a single binary operation or in terms of three, a little of the theory of general algebras enters quite naturally. A diagram indicating the interrelations of the various systems will be found at the end of Chapter II.

The more highly developed parts of the subject have been treated in detail. Here the emphasis is on theorems and proofs; the work of several mathematicians has been fused into a single whole with only a mild attempt to indicate their several contributions. This is the case, for example, with the main body of the theory of loops and with the theory of ideals in semigroups. At other points significant theorems have been stated without proof but with precise references to the literature.

Die Bezieher des „Zentralblatt für Mathematik“ erhalten die „Ergebnisse der Mathematik“ zu einem gegenüber dem Ladenpreis um 10% ermäßigten Vorzugspreis.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG